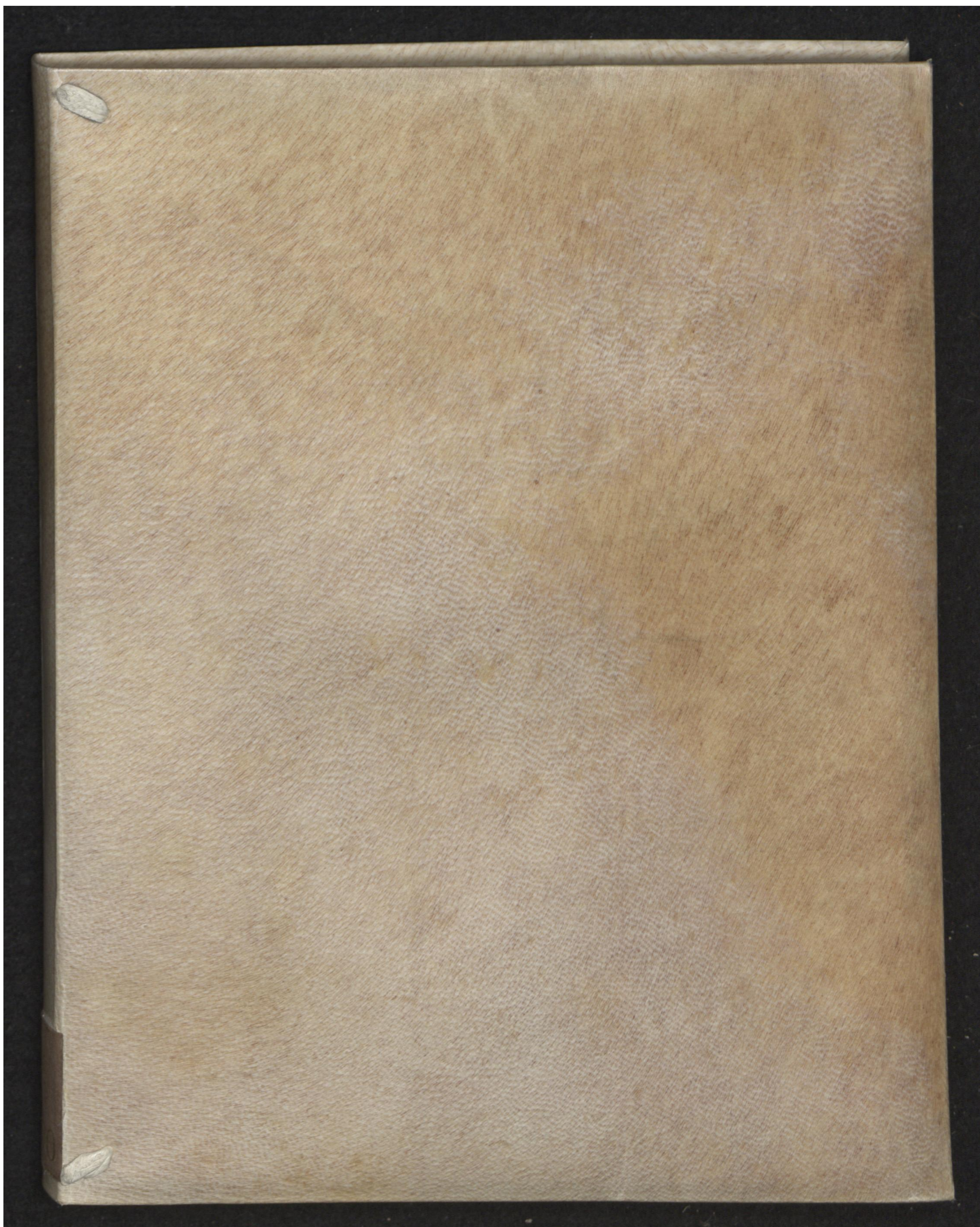
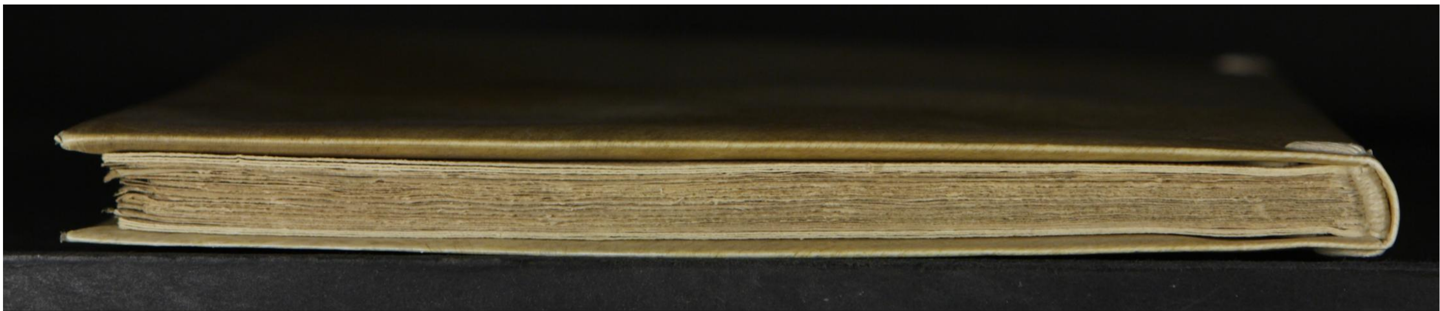



I
7
190

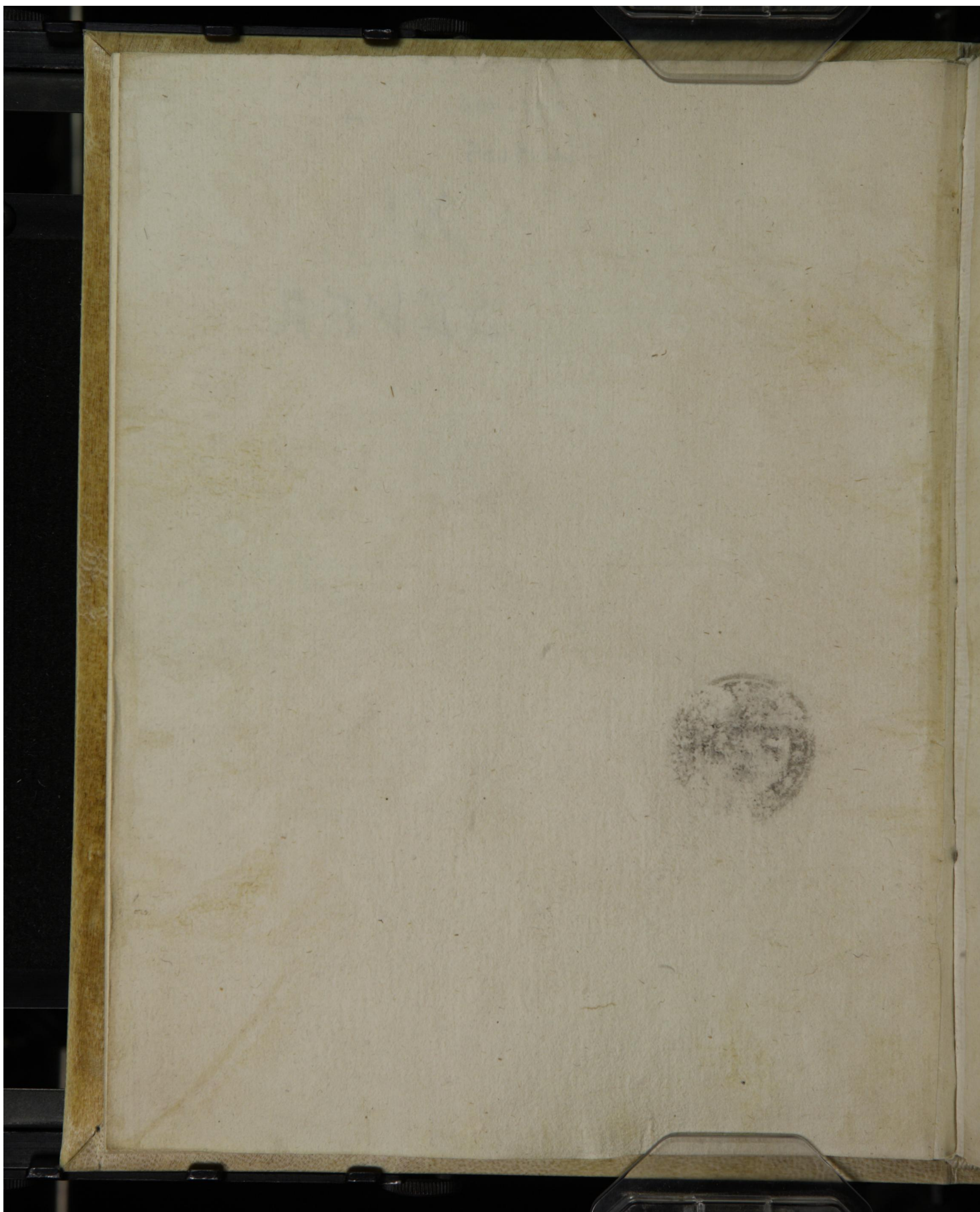












CHRISTIANI SEVERINI LONGOMONTANI, CIMBRI,

ROTVNDI IN PLANO,

ſeu

CIRCVLI,

ABSOLVTA MENSVRA,

Duobus libellis comprehenſa,

Quorum

Prior veram conſtitutionem Peripheriæ Circuli Synthetice perficit, & mox hujus ad Diametrum rationem.

Poſterior Geodæſiam Rotundi in plano analytice abſolvit, hujuſque ut & partium ejuſdem cum adſcriptis Rectilineis omnis ferme generis permutationem adæquatam in lineis pariter ac Numeris oſtendit.





AMSTERDAMI,
Apud IOHANNEM BLAEV.
CIↃ IↃC XLIV.

Nobiliſſimo & Conſultiſſimo Viro,

D. ALBERTO CONRADO BVRGIO,

I.V. Doctori, Amſtelodamenſis Reipublicæ Conſuli, Curatori Societatis Indiæ Occidentalis, Illuſtriſſimorum Fœderatæ Belgicæ Ordinum ad Potentiſſimum Ruſſiæ Imperatorem, item ad Sereniſſimum Daniæ Regem, Exlegato, in Collegio etiam Illuſtrium Hollandiæ, & Weſt-Friſiæ Ordinum antehac Delegato, & Illuſtris Amſtelodamenſium Gymnaſii Curatori, Domino Fautori ſuo.

S. P. D.

Nobilisſime, Ampliſsime, & Conſultiſsime Domine,



Nnus jam tertius effluxit, Vir ampliſſime, ex quo nomine Illuſtrium confœderatorum Ordinum Hollandiæ Legationem ad Sereniſſimum Regem noſtrum Daniæ obiens, heic Hauniæ aliquandiu ob Regis abſentiam ſubſiſtebas: Interim autem me ad Colloquium tecum vocari dignatus es, forte fama motus, quam in Belgio veſtro, meipſo majorem, adeptus fuiſſem. Vbi inter alia, citra fidem cujuſdam tunc præſentis, non autem veritatem ipſam, primum me Circuli velut Rotundi in Plano, veram menſurationem inveniſſe coram referebam, ac Sereniſſimo & Clementiſſimo Regi meo jam dudum humillime dedicaſſe. Cujus quidem Inventionis Exemplar tandem in pauca Problemata redactæ, filio tuo CVNRADO BVRGIO, genio & ingenio præſtantiſſimo Adoleſcenti, quum me eodem tempore heic inviſeret, impertivi, & aliud quod ſecum in Italiam exportaret, quo actutum, ut Excell. tua referebat, mittendus, & D. Galilæo de Galilæa commendandus erat, apud quem ſperatum in Matheſi progreſſum impleret, fundamento antea in Elementis Euclidæis feliciter ſtrato. Ad hunc autem cum dicto

dicto Exemplari litteras per filium dedi, quibus Lynceum illum virum, maximæque tunc in Orbe famæ, obnixe rogavi, ut Reipub. universæ Mathematicæ gratificando, aut ipse Inventum istud nostrum sub incudem revocaret, aut alicui præstanti Mathematico Italo, si sibi per ætatem, & visus [ut ægre audivimus] orbitatem, id minus liceret, resolvendum & judicandum traderet, qualem D. Camillum Gloriosum, ex hujus, quæ ad nos pervenerunt monumentis, accepimus. Quod an factum sit nondum mihi constitit, forsan ob Galilæi diuturnam infirmitatem, & ultimum nuper [quod cum dolore percipimus] fatum. Interim Invento nostro equidem tantam fiduciam tribui, ut non veritus sim, de fama pariter & fortuna mea, cum quovis, præcipue vero inter præstantes Mathematicos, calamum contra stringente, periclitari. Velut quoque supplices litteræ de hac re ad Serenissimum & Clementissimum Regem meum submisse scriptæ, & ante biennium editæ, omnibus testantur. Non enim exigui momenti esse putavi Problema Cyclometricum à pluribus Mathematicis, omnis litterarii seculi solicite agitatum, primum nunc inventum, & exquisite in Numeros esse solutum. Quoniam vero spartam, quam divina providentia, præ aliis in hoc argumento nactus sum, ornare usque me decebit, hosce equidem geminos Libellos de mensura ipsius Rotundi in plano, tum

diductiore ſecundum hexagoni naturam, in quo naſcitur, demonſtratione, tum uberiore, quam hactenus in Geodæſia, uſu, ultimo jam in hoc meo ſenio Octogonario confeci. Quos quia in Belgio excudendos deſtinaveram, quo & nitorem Aſtronomiæ Danicæ, opera amicorum, qui Typographiæ illic præſunt, induerent, & illinc Orbi citius innoteſcerent; Non potui, Vir ampliſſime, quin eoſdem ſub illuſtri tuo nomine in lucem ederem, atque inſignis tui in me favoris teſtes relinquerem. Siquidem & apud nos olim fama fuerat, abſolutam Circuli menſuram, hoc eſt, Diametri ad peripheriam veram in Numeris rationem, ſicubi à quoquam inventam, admodum eximiâ perilluſtrium Ordinum Confœderatorum liberalitate redemtum iri; apud quos ideo artes Mathematicæ inſigniter creverunt, quia hiſce, unde tantæ utilitates fluunt, juſtum ſtatuere precium minime intermiſerant. Ideo in hoc argumento abſolute perficiendo ſtrenue laborarunt, nec tamen omne punctum tulerunt, Ludolphus de Cölln, item Clarus ille ab origine & litteris Ioſephus Scaliger, quamvis hic eximiæ ſuæ famæ partem non exiguam irrito Cyclometrico conamine decoxerat. Præter hos quoque Willebrordus Snellius, Philippus Lansbergius, & forte plures. In aliis vero auguſtiſſimæ Matheſeωs partibus tam Cælum quam Terram concernentibus, etiam cum hiſce, innumeri apud

apud Belgas alii, quorum omnium memoria in monumentis ſuis ſupereſt, apud poſteritatem pro horum valore, magis minuſve duratura. Sed finem facio, & te, Vir ampliſſime, cum tota celebri Burgiana domo Divinæ benedictioni commendo, meque priſtino tuo favori. Hauniæ Danorum, ipſis Calendis ſexteilibus Anni Salvatoris I. C. 1643.

Illuſtri T. Amplitudini

addict.

Chriſtianus Severini Longomontanus Cimber,
Regiæ Acad. Haun. Superior Mathem. P. P.

Ad Lectorem Diametricum.



Vam necessarium sit ad universalem Geodæsiam pariter, & Rotundi mensuram, Circulum cum suis adscriptis partibus ac planis rite cognitum habere, praxis secundi libelli horum, benignum Lectorem admonebit, in qua compendiose admodum & longe aliter, quam hactenus ab ullis Mathematicis nostra instituitur operatio, & ad verum finem perducitur, ob veram Diametri Circuli rationem ad peripheriam lib. 1 *horum inventam, nec nisi potentia Numeris convenientem.*

Igitur, quæ ipsis impossibilia hactenus visa fuere, nempe dicta plana nonnulla seorsim in veris numeratisque mensuris enucleare, ea fere nullo negotio nostræ computationi parent. De Circulo itaque, & peripheriæ ejusdem ad Diametrum ratione, priore libello agimus, vim proportionis sesquitertiæ *ad hunc Gordium nodum solvendum ubique manifestantes, ut scilicet fundamentum Geodæsiæ hujus Cyclometricæ, rite ponamus, & variis deinde consectariis confirmemus. Vbi id ab incredibili per plures annos exploratione didicimus, nullam scilicet veram & legitimam Circuli mensuram Geometrica hypothesi, absque Numeris, & ipsorum certis ad invicem proportionibus constitui posse, non magis certe, quam* Paraboles *apud Archimedem; imo neque numeris quidem, qui ex Sectione Peripheriæ fluunt, utut longissime extensis, quandoquidem imperfectionem hæc* ἐργασία *semper secum trahat, ut partim sub*

finem

finem lib. 1 horum, partim in Diatriba Cyclometriæ Hamburgensi subjuncta olim manifestavimus. Proinde non modo vetusti, Antipho, Bryzo, Hipparchus; Sed etiam recentiores, Orontius Gallus, Iosephus Scaliger, & innumeri alii, qui aut irritæ Computationi adscriptorum Circulo planorum cum hujus area insistebant; aut adsumptæ Circuli particulæ, aliam hactenus penes eundem æquari posse præsumebant. Nam hi omnes, ut etiam ii, qui in secanda peripheria cum Archimede laborarunt, oleum & operam, ut dicitur, in vera ac genuina Circuli mensura in lucem mortalium producenda, perdiderunt. Neque certe absoluta mensuratio Circuli nobis obtigisset, nisi lineæ rectæ ac Circularis Symmetria, & per consequens, æqualitas in Natura extitisset, quam Archimedes pr. 1 de Circulo præsupponebat, & Eutocius Ascalonita Archimedis fidus interpres à nemine dubitari affirmabat. Et quidni? Linea enim recta & Circularis sub eodem genere sunt; Quapropter earum Symmetriam non modo prop. 4, cap. 3 Quadr. Circuli, liquido satis ostendi; sed etiam eandem hisce libellis ulterius sum confirmaturus. Verum ut ad propositum deveniamus, quamvis plures viæ Circuli mensurandi sunt à nobis inventæ; tamen hac potissimum nunc incedendum putamus, quam Proportio sesquitertia *ex ipsa Natura proficiscens nobis luculenter demonstrat, dum etiam Problema Cyclometricum perillustri & Magnifico Regio Cancellario* D. CHRISTIANO THOMÆ de STOVGARD *ante triennium dedicatum, longe illustrius heic redditur, adeo ut quod hactenus in hoc argumento forte demonstrationum involucris præclusum fuerat, à Mathematatum*

Tyronibus cæteroquin mentem adhibentibus, ſatis clare nunc cognoſcatur. Si quis autem ſe ex Labyrintho Cyclometrico nondum liberatum conqueritur, cauſam indicet, cur in luce meridiana ceſpitet, & Demonſtrationes à Natura, ut dixi, derivatas, quæ Rotundum planum cum rectilineo proportionis continuæ ſeſquitertiæ in hexagono, *& inventæ inibi rationis Sectionis & Corniculati oblatione neceſſario conciliant, faſtidiat, forte dum inveteratæ nonnullorum opinioni de Circuli quadrandi impoſſibilitate tenaciter adhæreat. Interim ſpero Benignum Lectorem incredibilium noſtrorum laborum, quos huic argumento aliquando expediendo per plures annos impendimus, æquum æſtimatorem futurum, nec hos à poſteritate, ſi quæ futura, unquam negligendos. Opt. Vale.*

CON-

CONTENTA CAPITVM
LIBRI I.
CAPVT I.

LIBER II.
CAPVT I.

CHRI-

CHRISTIANI SEVERINI LONGOMONTANI CIMBRI,

ROTVNDI IN PLANO, ſeu CIRCVLI, ABSOLVTA MENSVRA.

LIBER PRIMVS,

De Peripheriæ Circuli conſtitutione, & ejuſdem cum ſua Diametro ratione.

CAP. I.

De ampliſſimo proportionis uſu, qua quoque hoc Cyclometricum argumentum ad optatum finem perducitur.



CIrculus quid ſit, quidque Diameter ejus, Euclides lib. 1 Definit. 15 & 17 deſcribit. Quid autem linea tangens, quid ſegmentum ſeu ſectio, item ſector circuli, idem Euclides lib. 3 Defin. 2, 5, 9 oſtendit, quo brevitatis cauſa Tyrones ſunt remittendi. Saltem heic, quæ ad circuli propoſitam menſuram ſpectant, compendioſe perſequemur, conſiderantes eam multis aliis modis per noſtram Circuli Quadraturam eſſe pertractatam.

Cæterum quoniam vera Circuli menſura non minus proportione numerorum, atque Paraboles apud Archimedem & inventio duarum mediarum linearum ex datis extremis, perficitur, operæ precium eſſe duco nonnihil de ampliſſimo

rationis ac proportionis usu præmittere, quæ alias lib. 5 Element. definiuntur & generaliter tractantur, siquidem eæ esse videntur, quæ totam naturam convinciunt, præcipue autem proportio continua ad Algebram ejusque æquationes unice se extendens. Ante omnia vero in Plani Geometriæ proportio trium terminorum, quæ non nisi continua est, ad optatas æquationes in hoc argumento, cæteroquin difficillimo, nos ducit: hæc enim ea est, quæ planiciei mensurandæ vere est accommodata, velut idem Plato in Timæo affirmat.

Vt vero proposito deserviam, vim aliquam eamque satis admirandam proportionis, Exemplis nonnullis in seqq. per numeros illustrabo.

Primo, inter quatuor Arithmeticæ species, quia postremis scilicet Multiplicationi & Divisioni proportio legem præscribit, dum ad tres terminos complendos, illic unitas Multiplicanti, & Multiplicando præfigitur; heic Divisori, & Dividendo, eadem unitas postponitur, proinde evenit, quod in alogis, seu surdis, ut vocant, numeris, producto ex multiplicatione, factus quoque radicum multiplicantis & multiplicandi potentiâ includatur. Contra vero ex Divisione etiam Divisor Dividendi radicem dividit & quoto potentia includit: ut in multiplicatione $\sqrt{6}$ cum $\sqrt{5}$, præfigitur unitas, & fit proportio $\sqrt{1}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{5}$, factusque $\sqrt{30}$, cui inclusa est radix, quæ ex multiplicatione radicum ex $\sqrt{6}$ & $\sqrt{5}$ potentiâ exsurgit.

Idem in resolutione horum, per Divisionem contingit. Nam unitate postposita stant termini prop. $\sqrt{30}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{1}$. Vnde quotus $\sqrt{5}$, in quo radix potentia est, pro unitate divisionis Divisoris $\sqrt{6}$, in Dividendo $\sqrt{30}$. Potentia dico, nam in hoc exemplo nulli numeri sunt vere quadrati. Ecce ergo aliud in vere quadratis. Exemplum Multiplicationis $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, factus $\sqrt{36}$, cujus radix 6 potentia producta ex 2 & 3, hoc est radicibus $\sqrt{4}$ & $\sqrt{9}$. Exemplum Divisio-

nis,

nis, $\surd 4$, $\surd 9$, $\surd 1$, quotus $\surd 2\frac{1}{4}$, cujus radix $1\frac{1}{2}$ ex 2 in 3 divisis, qui numeri radices sunt $\surd 4$ & $\surd 9$.

Igitur ob unitatem, quæ heic proportionis causa accersitur, Multiplicatio & Divisio in alogis longe quam Additio & Subductio in iisdem sunt faciliores.

Secundo: In omni multiplicatione duorum numerorum factus potentia est medium proportionale, inter factores, ut ex 6 & 5, factus est $\surd 30$, medium proport. potentia inter 6 & 5, Quod mox cognoscitur factoribus 6 & 5 in suos quadratos diductis, qui sunt 36 & 25. Stat enim sic proportio trium terminorum $\surd 36$, $\surd 30$, $\surd 25$. Hinc sequitur, quod in omni rectangulo area hujus sit media potentia inter duo latera, unde constat.

Porro, latera si fuerint Symmetra, ut 2 & 8, area quidem rectanguli ex his potentia fit 16, & radix hujus 4 media proportionalis inter 2 & 8. Stant enim tres termini in subdupla ratione 2, 4, 8. Hæc in numeris, in lineis autem rectis mediam proport. invenire, inter duas datas, ostendit Euclides prop. 13 lib. 6 Element.

Tertio, quod nulla alia ars efficere potest, ut scilicet ex alogis & prorsus asymmetris numeris inter se Symmetri possint elici, id sola proportio præstabit, neque id solum, sed etiam terminos quatuor proportionis disjunctos ad continuam proportionem trium terminorum reducet: ut sint tres numeri seu magnitudines prorsus inter se longitudine asymmetri $\surd 3$, $\surd 5$, $\surd 6$, ex quibus quartus per auream regulam proportionis fit $\surd 10$. Hi omnes quatuor termini $\surd 3$, $\surd 5$, $\surd 6$, $\surd 10$ reperiuntur per prop. 10, lib. 10 Elem. longitudine inter se incommensurabiles. At binis quibusvis inter se multiplicatis, facti ex illis erunt Symmetri; nam ab extremis $\surd 3$ & $\surd 10$ factus est $\surd 30$, æqualis scilicet facto à mediis $\surd 5$ & $\surd 6$, ergo quoque Symmetri. Porro, multiplicato termino primo $\surd 3$ in terminum secundum $\surd 5$, factus erit $\surd 15$, similiter ter-

tio √ 6, in quartum √ 10, factus est √ 60, qui duo numeri √ 15 & √ 60 inter se Symmetri sunt. Nam hi inter se multiplicati gignunt √√ 900, cujus quadratus est √ 30, medius inter √ 15 & √ 60. Stant proinde termini tres in continua proportione subdupla √ 15, √ 30, √ 60, videlicet ad continuam trium terminorum proportionem à proportione quatuor terminorum √ 3, √ 5, √ 6, √ 10 reducti, quod erat ostendendum.

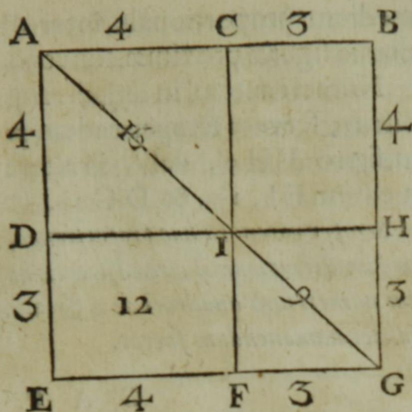
Quarto: Nec certe minus facit ad usum & praeeminentiam proportionis continua trium terminorum, præcipue in hoc argumento commendandum, quod nimirum Parallelogrammum, sive illud quadratum, sive rectangulum, sive rhombus vel rhomboides fuerit, si in eo Diameter ducta fuerit, duæque lineæ lateribus parallelæ, Diametrum utcunque secantes in uno eodemque puncto, ita ut Parallelogrammum ab his parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma, erit alterum complementorum æqualium, medium proportionale inter ea, quæ circa Diametrum. De quadrato ἀπόδειξις est Lemmate subjecto prop. 54, lib. 10 Element. Eandem vero de Parallelogrammis in genere Cyclometria Hamburgensis prop. 4, cap. 7 perficit. Nos hic quod ad propositum maxime spectat quadratum & rectangulum, cum suis numeris adscriptis pro ipsa demonstratione oculis subjiciemus.

A C B

Sit proinde linea recta AB, unde quadratum est extruendum per prop. 46, lib. 1 Elem. divisa scilicet [pro instituto nostro in seqq.] ratione sesquitertia in C, ita ut AC se habeant ad CB, velut 4 ad 3. Vnde sequens quadratum extat cum sua Divisione ut vides.

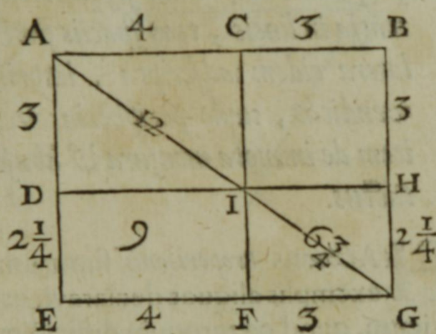
Atqui heic ad oculum cernis, quemadmodum Parallelogramma tria intra hoc quadratum nempe DC, 16. EI, 12. & FH, 9. in continua sunt proportione sesquitertia & tribus terminis,

terminis, inter quos, quadrata circa Diametrum A G sunt, D C 16, & F H 9, medius vero complementum E I 12.



Neque minus in rectangulo, eandem proportionem perficiemus.

Retineatur latus A B divisum in C, ratione, ut supra, sesquitertia, sed B G seu A E in eadem ratione, dum B H sit 3 p. H G vero $2\frac{1}{4}$.



Ex hisce confecto rectangulo, & secundum datam rationem in quatuor Parallelogramma, tributo, inscribantur heic quoque numeri pro mensuris laterum rectangula inscripta quævis conficientium D C, 12. E I, 9. F H $6\frac{1}{4}$. Similiter in proportione sesquitertia continua trium terminorum.

Alio modo.

Vel fingamus 12 & $6\frac{1}{4}$ circa Diametrum esse quadratos numeros velut in priore figura: Erunt igitur necessario in hac ad proportionem sesquitertiam, surdi Symmetri, qui per 4 prop. lib. 2 Elem. additi perficiunt $36\frac{1}{4}$ totius figuræ E B contentum, unde singula complementorum E I vel I B sit 9

 medium

medium proportionale inter $6\frac{1}{4}$ & 12, in quadratis; & sic omnia figuræ proximæ conveniunt.

Numeri autem in singulis augeri minuique possunt pro arbitrio, servata semper eadem proportione [heic sesquitertia] ut si pro F H 9, vel $6\frac{1}{4}$ in altera figura, ponatur unitas, erit medium E I, $1\frac{1}{3}$, & D C $1\frac{7}{9}$.

Semper autem in hac proportione sesquitertia erit ratio numerorum, in Parallelogrammis circa Diametrum, ad invicem, quæ est 16 ad 9, qui numeri sunt quadrati de 4 & 3. Quod pro usu in seqq. heic generaliter admonendum fuerat.

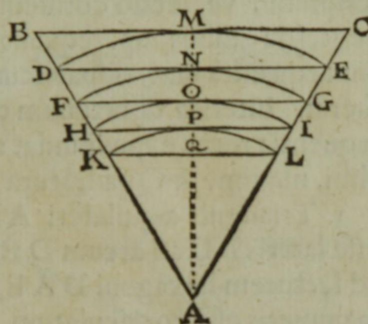
CAP. II.

De proportione continua sesquitertia, quam circulus, tum potentia in lineis, tum spaciis similibus penes triangula æquilatera eidem adscripta, imprimis vero hexagonum sibi vendicat, unde peripheria circuli in seqq. rite perficitur: item de immota mensura & abusu anguli, ut vocant, contactus.

HActenus *Proportionis* summam in Mathesi necessitatem exemplis aliquot declaravi, ut Problema hoc Cyclometricum, quod cæteroquin difficillimum esset futurum, eidem rite secundum Naturam accommodatum, omnium in numeris facillimum ostenderem. In quo quidem omnium primo ad exemplum Archimedis pr. 1 de Circulo; peripheria Circuli, ejusque cum linea recta æqualitas [quæ revera in natura est, ut Eutocius fatetur, & postea ex planis intra hexagonum circuli comprehensis, demonstratur, quando scilicet peripheria circuli ex illis Synthetice colligitur] constituenda nobis simul & demonstranda venit.

Vt vero ad propositum deveniamus, sit triangulum æquilaterum, quod basis hujus negotii est, A B C continua arcuum inscriptione

inſcriptione etiam ex triangulorum ſubſequentium Diametris, idque beneficio circini, quo latera ipſius trianguli A B C, nempe B A & C A naturaliter pariter ac Geometrice ſecantur & diſtribuuntur, in eam ordine proportionem, quæ ſeſquitertia eſt continue. Vnde non modo ſubſequentia triangula æquilatera, ſed etiam ſectiones hexagonæ, etiam corniculata intermedia, quibus ſectiones à triangulis diſcernuntur, ad eandem proportionem ſeſquitertiam ſeſe accommodant, ut modo in ſubjecta figura patebit.



In ea autem, quoniam trianguli æquilateri A B C latus aliquod A B, ſe habet ad Diametrum ejus A M, ut $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{3}$, atque ita ordine. Quando igitur quatuor arcus D E, F G, H I, K L, dicto triangulo A B C inſcribuntur, erunt ſingula ſegmenta lateris A B, vel A C ordine ad invicem in eadem ratione. Proinde expoſito A B, vel A C, 4 p. & ejus quadrato $\sqrt{16}$, erit A D, vel A E $\sqrt{12}$. Vt enim $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{3}$, ſic $\sqrt{16}$ ad $\sqrt{12}$. Rurſus ut $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{3}$, ſic A D $\sqrt{12}$ ad A F $\sqrt{9}$, hoc quoque modo fit A H $\sqrt{6\frac{3}{4}}$ & A K $\sqrt{5\frac{1}{16}}$. Quæ continua eſt proportio ſeſquitertia, ſeu ut $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{3}$, ubi notandum, quod alterna latera in numeros veros exeant, ut A B 4, A F 3, A K $1\frac{1}{4}$ in ſuis radicibus. Nec diſſimilis ratio inſcriptorum arcuum eſt.

Porro quia figuræ ſimiles ſunt in duplicata ratione homologorum laterum, hoc eſt, ut modo ſupra, in ipſis quadratis, ſunt proinde omnia hæc quinque triangula æquilatera ordine in eadem ad invicem proportione, quare poſito ut ſupra A B C triangulo 16, erit triangulum A D E 12, triangulum

vero

vero A F G 9, triangulum A H I $6\frac{3}{4}$ Denique triangulum D K L, $5\frac{1}{16}$ ordine in proportione ſeſquitertia.

Amplius, quoniam partes ſimiles figurarum ſimilium in eadem inter ſeſe cum totis ſunt ratione, ſequitur adhuc, quod ſectiones hexagoni, item corniculata, ſingulæ nempe ſpecies ad invicem, ſint in eadem, juxta ſeriem ſuam proportione ſeſquitertia, quomodocunque in ſequentibus æquationes inter ipſa ceciderint. Ipſis namque inventis, hoc eſt, in quantum vel triangulum proximum ſectionem hexagoni inſcriptam, vel ſectio corniculatum ordine proximum ſuperaverit, [de quibus cap. ſequente,] mox abſque mora, quæ tam anxie quæſita ſunt, diſpaleſcunt; ad quæ hoc caput παρασκευὴ fuerat. Interim oportunum eſſe duxi, ut nonnulla, quæ ad ſequentia recte expediunda, amplius ſpectant, adjiciam, quæ alibi, maxime in Quadratura circuli noſtra ſunt demonſtrata.

1 Trianguli æquilateri A B C eandem prorſus rationem eſſe lateris B C ad arcum D E, quæ eſt ipſius trianguli A B C, ad ſectorem hexagoni D A E, & ideo utriuſque Differentiam in numeris eſſe corniculatum B C E M D, ex prop. 5, cap. 2 Quad. Circuli.

2 In triangulo æquilatero linea tangens ſeu latus trianguli commenſurabile eſt arcui ſubjecto, aut in veris numeris aut ſurdi ſymmetris. Ex propoſ. 9, cap. 3 Quadr. circ. quod & ulterius capp. ſeqq. confirmabitur.

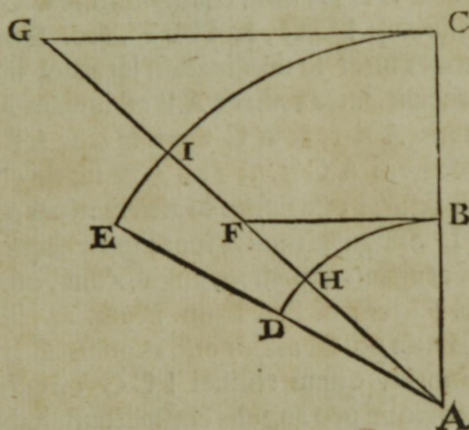
3 Quod quidam obvertunt, nullam ſcilicet proportionem ſectionum & corniculatorum hexagonicorum inter ſe invicem iniri poſſe, propterea quia major angulus in circulo minori à linea tangente, quam in majore relinqui cernitur; quod quam falſum in ſeipſo fuerit, quantumque rotundum rite hactenus menſurandum diſturbarat, etſi cap. 2 Quad. circ. oſtendi, & ſimul angulum in ſemicirculo rectum eſſe, nec ideo angulum contactus, ut vocant, angulum niſi κατάχρησιν nominari, ſed ſpacia ea utrinque per corniculata declinantia,

recte

recte ab Euclide πόπυς appellari: tamen ut omnibus Mathematicis, quæ ibidem oſtendebam, adhuc magis perſpicua eſſe poterint, idem in adjecta figura Geometrice demonſtrabo, angulo contactus, etiam ex mente multorum, pro vero conceſſo.

THEOREMA ita habet:

Angulus, ut vocant, contactus in minore & majore circulo, perpetuo ſibi eſt æqualis.



Igitur A B radio deſcribatur ſexta circuli pars B D, quam tangat linea recta B F, quæ ex hypotheſi æqualis ſit circulari B D.

Eſt igitur in hoc circulo angulus contactus H B F: & trilineum H B F æquale ſectori H A D, adeo ut ſi angulus contactus H B F, pro quantitate corniculati hujus habebitur, ut nonnulli inepte autumant, certe manifeſtum ſatis foret, quod talis angulus poſſet eſſe acuto quovis major, dum ſectori H A D æquatur. Imo poſſet quoque ratione circumferentiæ circuli augeri minuique, dum neceſſario æqualis fieret ſectori H A D, ſublato ſcilicet ab æqualibus, nempe triangulo A F B & ſectore A D B, æquali B A H: nam ob æqualitatem linearum B F, & B D, triangulum rectangulum A B F erit ſectori A B D æquale. Ex prop. 1 Arch. de Circulo.

Sit deinde radius A C duplo major quam A B, & inde eodem modo deſcribatur arcus ſextæ circuli partis C E, qui quoque duplus erit B D, & acta linea recta ex A per F in G, tangentem C G, erunt tam homologi arcus, quam latera in dupla, figuræ autem hæ ſimiles, in duplicata, hoc eſt quadrupla ad invicem ratione.

Nunc ad id, quod heic præcipue demonſtrandum, perveniemus.

I Si figuræ ſimiles ſunt in duplicata ratione homologorum laterum, certe figuræ ſchematis hujus, nempe ſector A C E & ſector A B D, item triangulum A C G, & A B F, tandemque trilineum I C G, & H B F, &c. Similes figuræ ſunt, quum omnes inter ſe duplicatam laterum homologorum rationem habeant, linea ſcilicet A B ad lineam A C, &c. adeo ut ſi poſueris A B 1, & A C 2 erit ſector A B D in comparatione ad ſectorem A C E, ut 1 ad 4, & ſic de cæteris. Similes proinde has figuras eſſe nemo Mathematicus negabit.

II Si figuræ ſimiles ſunt figuræ æquiangulæ & proportionales cruribus æqualium angulorum, omnino omnes, ut Def. 1, lib. 6 Elem. & Pet. Ram. Elem. 14, lib. 4 oſtenditur; profecto non poteſt major eſſe angulus ad B trilinei H B F circuli minoris, quam trilinei I C G circuli majoris, ubi B & C utrobique pro angulis contactuum habentur, ſiquidem hæ figuræ cruribus prorſus ſunt proportionales, prop. 7, lib. 6 Element. Separandi itaque hoc modo circuli fuiſſent potius, quam ad unum lineæ rectæ contactum ambo major & minor apponerentur, ne ſic æſtimatori, quiſquis fuerit, ſenſus viſualis imponeret, velut in figura pag. 28 Quadr. circ. ad oculum oſtenditur. Et quid quæſo ἀγεωμέτρητον magis eſſe poterit, quam figuras ſimiles, quales circuli revera ſunt, totis ſimilibus inſcriptas, harum ratione augeri minuique haud poſſe? Aut inſulſe admodum cum Philippo Lansbergio in ſua circuli Quadratura fateri, non eſſe eandem prorſus rationem peri-

pheriæ

pheriæ circuli minoris ad ſuam Diametrum, quæ majoris ad ſuam, quam numeris Ludolphæis propoſito ſuo ubique accommodandis, premeretur.

Sed de his, quæ hactenus monſtroſo iſti angulo contactus, etiam ultra Euclidem prop. 16, lib. 3 Elem. à Campano, & variis aliis commentatoribus, velut miraculoſe attributa ſunt, ut poſteritas recte diſpiciat, veræ & illibatæ Geometriæ plurimum intereſſe putandum eſt; etiam ne hic ſcrupulus veræ Cyclometriæ decurſum amplius impediat.

CAP. III.

De vera conſtitutione Peripheriæ Circuli, & Diametri ejus ad eandem ratione.

Dignitatem uſus perpetui proportionis cap. primo quodammodo attigimus; ſecundo autem cap. oſtendimus hexagonum circuli cum ſuis inſcriptis ſectionibus ad proportionem ſeſquitertiam ubique exigi, idque abſque aſymmetrias pariter & anguli contactus [ut illum perperam vocant, quum nullus ibi verus angulus ſit, velut cap. 2 Quadr. Cir. convictum eſt] offenſione. Igitur nunc ad caput tertium ex præmiſſis tranſitionem paramus, quod in ſe ſummam negotii Cyclometrici Problematis continebit, ubi ſaltim modos aliquot in medium produxiſſe ſufficiet ex eadem ſeſquitertia proportione deſumendos, & in demonſtrationem dirigendos, non vero omnes, quibus Naturam in hoc argumento abundare novimus.

Primo autem repetatur figura hexagoni capite antecedente παρασκευαστικῶς præmiſſa; ſiquidem in hoc ſolo hexagono totius circuli veram menſuram heic venamur; ſed heic ſaltim cum numeris menſurarum appoſitis.

Brevis Recapitulatio eorum, quæ cap. præcedente sunt exposita, ac repetitæ figuræ hexagonicæ adjecta.

Sectio lateris A B.			Figuræ in genere.
A B	4	√ 16	16
A D		√ 12	12
A F	3	√ 9	9
A H		√ $6\frac{3}{4}$	$6\frac{3}{4}$
A K	$2\frac{1}{4}$	√ $5\frac{1}{16}$	$5\frac{1}{16}$

Explicatio.

In hac tabella prima series seu columna litterarum, respondet lateri figuræ hexagonicæ A B, cum suis segmentis.

Secunda radices, quæ sunt veri numeri.

Tertia columna exhibet latera segmentorum in duplicata ratione, seu quadratis.

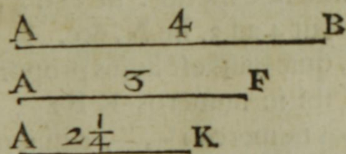
Quarta ipsas figuras singularum specierum hexagono inscriptas numeris exponit, & quidem ordine in proportione sesquitertia, ut figuræ generali hexagono sunt insertæ, cujuscunque tandem speciei fuerint. Hisce oportune hoc loco addi potest, Eandem scilicet esse *Rationem* inter duas diversas species figurarum identidem. Nam eadem ratio est inter tangentem B C, & arcum D M E ei subjectum, quæ est inter tangentem H I, & arcum K P L. Similiter inter sectionem D E & corniculatum subjectum D E G N F, eadem est ratio, quæ inter sectionem F G & corniculatum F G I O H, &c. pro qua primo invenienda *Ratione*, si prædecessores

deceſſores ingenii acumine mediocri uſi fuiſſent, ſupplementum Geometriæ in Rotundi vera menſura pulchre perfeciſſent.

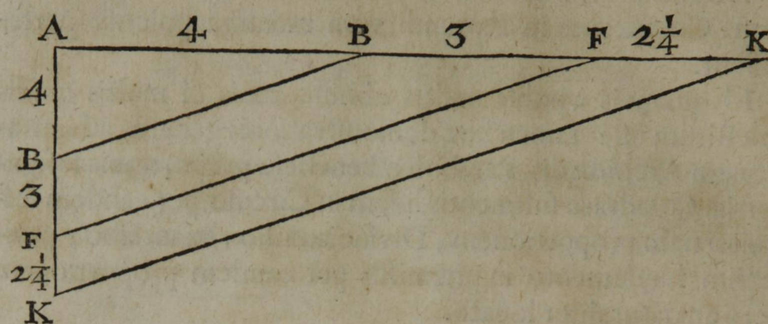
Id quamvis à nobis multis abhinc annis & multis modis præſtitum eſt: tamen hoc demonſtrationis genere, ad imitationem Archimedis, Parabolen beneficio proportionis ſeſquitertiæ Quadrare ſuſtinentis, idem in Circulo, per eandem ſeſquitertiam proportionem, Divino auxilio, exantlabo; præſertim fundamento in præmiſſis per eandem proportionem vere ac naturaliter locato.

De ratione invenienda inter ſectionem hexagoni & corniculatum ei proxime ſubjectum.

Vt autem veſtigia in ipſa Natura premamus, quibus velut rectis lineis, ſua rectangula claudentibus, dicta *Ratio* per dictam proportionem ſeſquitertiam, demonſtrabitur, figuram iſtam hexagonicam huc reducemus, ac latera ibidem in veris numeris apparentia, & nihilominus terminos proportionis ſeſquitertiæ repræſentantia, ut puta A B 4, A F 3, A K $2\frac{1}{4}$, inſuper ex ipſa figura in viſum noſtrum eximemus.



Ex hiſce tribus lineis in continua proportione ſeſquitertia, ut è figura præcedenti deſumptæ ſunt, exiſtentibus, una linea recta conficitur A B F K, contracta ad A B F K minorem proportionalem per 10 prop. lib. 6 Element. ut ipſam, in demonſtratione, charta capiat.



Vel, si linea quævis recta dividatur juxta proportionem sesquitertiam in 4, 3, $2\frac{1}{4}$ partes æquales. Nam res hæc eodem redit.

Noëmata Quædam ad sequentem rationem inter sectionem hexagoni & corniculatum proxime subjectum, demonstrandam necessaria.

I In proportione sesquitertia superiore hexagono cap. 2, & hoc 3, demonstrata, Directores sunt numeri seu lineæ 4 & 3, terminos augendo hoc modo: ut 3 ad 4, sic N, &c. minuendo hoc modo, ut 4 ad 3, sic N, &c.

II Linea K A, quæ basis est hujus proportionis subsesquitertiæ, distributa ibi in numeros K F $2\frac{1}{4}$, F B 3, B A 4, potest reduci ad hos numeros $1\frac{4}{3}$, $\frac{16}{9}$, æquipollentis inter sese rationis; nam, ut $2\frac{1}{4}$ ad 1, sic 3 ad $\frac{4}{3}$, & sic 4 ad $\frac{16}{9}$, &c.

III In hoc Noëmate tria Requisita diligenter consideranda veniunt, quæ, ex resolutione hexagoni præmissi, simul concurrent ad inveniendum veram Rationem inter sectionem hexagoni & corniculatum proxime subjectum; in qua quidem inventa Ratione cardo totius hujus argumenti vertitur, ut quoque antea attigimus, & ἀνάλυσις præmissi hexagoni secum

cum quodammodo attulerat. In tribus autem hisce Requisitis deprehendes tres leges Aristotelis: κατὰ παντὸς, καθ' αὑτὸ, καθόλου πρώτου, ordine servari.

1 Vt ubique omnes termini ordine dirigantur, per primum Noëma, ad proportionem illam famosam sesquitertiam, & subsesquitertiam, quam Natura ipsius præmissi hexagoni in figuris omnibus similibus sibi inscriptis urget.

2 Vt Symmetria sectionum & corniculatorum competentium, ubique juxta Catallela ipsorum spacia fiat. Nam quæ incommensurabilia sunt, in nominatam exquisite rationem coire negant.

3 Vt iidem prorsus numeri, qui superius ab hexagono, pro figuris similibus in genere emergebant, rursus redeant, penes hexagoni sectiones, vel etiam corniculata, in sectionum loca, per medium proportionale, transeuntia. Numeri autem isti sunt $5\frac{1}{16}$, $6\frac{3}{4}$, 9, 12, 16.

Hisce, in quibus Demonstrationis vis cernitur, præmissis, ad ipsam nunc accedamus, cujus problema ita habet.

PROPOSITIO.

Ratio sectionis hexagoni ad Corniculatum ordine subscriptum est dupla sesquiquarta, hoc est, in numeris $2\frac{1}{4}$, *qua resoluta, erit nominata sectio ad dictum Corniculatum, ut* 9 *ad* 4.

Hujus problematis sufficiens Demonstratio, in tribus potissimum consistit, nempe ἐκθέσει, & duplici ἀποδείξει, altera scilicet mox ab ἐκθέσει ducta; altera penes resolutam rationem $2\frac{1}{4}$ in 4 & 9, uberius expediunda.

EXPOSITIO

Dividatur, ut in sequentibus, linea aliqua recta, ut L M, in suffi-

ſufficientes partes æquales, pro quinque gradibus ſeu numerorum ſedibus, $5\frac{1}{16}$, $6\frac{1}{4}$, 9,4, 16, idque beneficio 4 & 3 ſeu potius heic 3 & 4, juxta primum Noëma.

Deinde per 2 Noëma ſumatur MO, unitas, qualium MN eſt $2\frac{1}{4}$, factiſque NP, & OQ parallelis ML, diſtinguantur ordine aſſcenſus ab imo termino ſeu gradu $2\frac{1}{4}$ ubique pro ratione inter ſectionem hexagoni & corniculatum proxime ſubjectum, per directores illos proportionis ſeſquitertiæ, nempe 3 & 4, velut litteræ numerique ſinguli in rectangulis καταλλελῶς utrinque appareant, ut ſequuntur.

P N

Sectio hexagoni.	E $7\frac{1}{9}$ L	D $5\frac{1}{3}$	C 4	B 3	A $2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$ M
Cornicul. correſpondens.	$\frac{256}{81}$ K	$\frac{64}{27}$ I	$\frac{16}{9}$ H	$\frac{4}{3}$ G	1 F	1

Q O

Sic enim cellulæ A B C D E totidem ſectiones hexagoni, ſed F G H I K Corniculata cum ſuis competentibus numeris utrinque repræſentant; ubi quoque primo pro ſimplici rationis propoſitæ expoſitione, Ratio Catallelorum non alia eſt, quam $2\frac{1}{4}$ ubique. Quod Diviſio Sectionis in Catallelum Corniculatum oſtendit, ut diviſa ſectione ſuprema E, $7\frac{1}{9}$ in Corniculatum K $\frac{256}{81}$ correſpondens, fit quotus $2\frac{1}{4}$. Et ſic in cæteris omnibus. In hiſce autem ratio modo data $2\frac{1}{4}$ vera fuerit, etiam heic ſectiones pariter & Corniculata in veris ſuis ad invicem magnitudinibus ſingula cernuntur.

Prior Demonſtratio.

At veram eſſe nunc ulterius per ea, quæ data ſunt, & trina illa Noëmatis præcedentis ultimi requiſita, [Quorum tamen primum,

primum, pro proportione ſeſquitertia ubique retenta, in ipſa ἐκθέσει, eſt declaratum] ſufficienter demonſtrabimus.

2 Ergo Symmetria loco ſecundo reſtat, facile expediunda inter Sectionem & correſpondens Corniculatum; ubi primum Lectorem admonuero, quod licet numeri $2\frac{1}{4}$, & 1, item 3 & $\frac{4}{3}$, &c. heic tanquam veri appareant: tamen in eo Symmetriam requirunt, quia ex duplicata ratione, hoc eſt, quadratis deſcenderunt, qui figurarum ſimilium ſeu homologarum notæ ſupra penes hexagoni ſolutionem fuere, ut mox ſub initium cap. hujus extant.

In ſuperiori autem ſchemate proxime quis dubitet Catallelos numeros quadratos, ut $2\frac{1}{4}$ & 1; 4 & $\frac{16}{9}$; denique $7\frac{1}{9}$ & $\frac{256}{81}$, eſſe commenſurabiles? Nec de cæteris dubitabit, modo reliquos 3 & $\frac{4}{3}$, item $5\frac{1}{3}$ & $\frac{64}{27}$ ſingulos Catallelos inter ſe multiplicaverit, inde enim mox quadrati procreabuntur. Erunt proinde hi velut ſurdi Symmetri; ut 3 per $\frac{4}{3}$ prodeunt 4, qui eſt numerus vere quadratus. Sic $5\frac{1}{3}$ & $\frac{64}{27}$ Symmetri ſunt, nam multiplicati radices oſtendunt $\frac{32}{9}$ ſeu $3\frac{5}{9}$. Quod idem in reductione omnium Catallelorum numerorum per Diviſionem ad numerum $2\frac{1}{4}$ vere quadratum confeſtim dignoſcitur.

3 Pro reditione numerorum, 16, 12, 9, $6\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{16}$, qui figuris ſimilibus hexagono inſcriptis in genere ſunt appropriati, fiant nunc ex ſectionibus corniculata, & iſtæ, æquivalente, ut prius, ratione, in ſuas ſedes promoveantur, per Regulam auream prop. interveniente medio proportionali, hoc modo, dum primus in Regula terminus fit corniculatum ſuperius expreſſum; ſecundus & tertius Sectio catallela, unde quartus terminus ordine ſectiones educit, numeris ſupra poſitis convenientes, ut:

K	$\frac{256}{81}$,	E	$7\frac{1}{9}$,	E	$7\frac{1}{9}$,	(	16.
I	$\frac{64}{27}$,	D	$5\frac{1}{3}$,	D	$5\frac{1}{3}$,	(	12.
H	$\frac{16}{9}$,	C	4,	C	4,	(	9.
G	$\frac{4}{3}$,	B	3,	B	3,	(	$6\frac{1}{4}$.
F	1,	A	$2\frac{1}{4}$,	A	$2\frac{1}{4}$,	(	$5\frac{1}{16}$.

Συμπέρασμα seu conclusio Demonstrationis prioris.

Quia igitur numeri hi pro sectionibus hexagoni de novo constituendis rediere, & sic omnibus tribus requisitis Noëm. 3 est satisfactum; proinde proposita ratio $2\frac{1}{4}$ inter sectionem & Corniculatum hexagoni vere est inventa.

Posterior Demonstratio.

Fiat propositæ rationis $2\frac{1}{4}$ analysis in numeros integros, eruntque ut 4 ad 9; sicque corniculatum proxime subscriptum sectioni hexagoni, ad ipsam sectionem similiter pro datæ rationis $2\frac{1}{4}$ nuda expositione. Sed quando ad sequentem figuram in debita proportione sesquitertia exigitur, mox & heic veritas clarius dispalescet; Etenim primo fiat linea proportionalis aliqua adhuc indeterminata, velut A K, in qua pro prima vice F D sit $2\frac{1}{4}$, D C vero 3; ista enim ratio eadem est cum 3 ad 4, qui numeri è Noëm. I, Directores sunt proportionis, in qua versamur, sesquitertiæ.

Deinde huic lineæ proportionali C F ducatur alia, quam fundamentalem vocamus, ad angulos rectos nempe F α, dis-

Corniculat. Sectio hexagoni.

	A E	E P	P δ	
A–C	$7\frac{1}{9}$ L	$5\frac{1}{3}$ Q	16	γ
C–D	$5\frac{1}{3}$ M	4 R	12	β
D–F	4 N	3 S	9	α
F–H	3 O	$2\frac{1}{4}$ T	$6\frac{3}{4}$	ε
H–K	$2\frac{1}{4}$ P	$1\frac{11}{16}$ V	$5\frac{1}{16}$	ζ

tributa in partes æquales 13 scilicet 4 pro Corn. & 9 pro Sectione

ctione hexagoni, ut è resolutione propositæ rationis $2\frac{1}{4}$ fluunt, adhibito, quod Noëm. 2 habet, ut pars quævis harum fiat æqualis F D. Deinde fiant D β & C γ parallelæ, & æquales singulæ F α: velut quoque A δ, dum A C in linea proportionali se habet ad C D, ut 4 ad 3. Sic totum rectangulum F β Scamnatum est, & easdem partes in se continet, quas linea fundamentalis F α exhibet, nempe 4 & 9, prout hi numeri sunt inscripti rectangulis F M, & N β.

Tertio erecta linea recta N E parallela F A, proveniunt, juxta proportionem sesquitertiam asscendendo, numeri pro Corniculatis, 4, $5\frac{1}{3}$, $7\frac{1}{9}$. Item pro sectionibus Catallelis, 9, 12, 16.

Quarto, ut veritas assumptæ rationis $2\frac{1}{4}$ ulterius in combinatione proportionis sesquitertiæ infallibiliter ac inconcusse confirmetur, sumatur tertia pars de linea fundamentali N α, quæ sectioni destinatur, hoc est, N S 3, de N α 9, & rursus erigatur linea recta S P, parallela F A, vel N E. Quoniam igitur ut est N M $2\frac{1}{4}$ ad M L 3, vel 1 ad $1\frac{1}{3}$, vel denique ut 3 ad 4, nam ratio eadem est; sic linea N S 3, ad lineam D M, eandem cum F N 4, & sic rectangulum N R, ad rectang. F M: Sunt igitur continui termini proportionis sesquitertiæ [quam ubique servandam urgemus, quemadmodum eam ab initio in resolutione hexagoni accepimus] in rectangulis N R 3, F M 4, D L $5\frac{1}{3}$, &c. Quæ quidem conspiratio rationis $2\frac{1}{4}$ demonstrandæ, cum dicta proportione sesquitertia, omnem contradictionem tollit, & inter alia, veritatis vindicem se præbet.

Ducantur enim & insuper Diagonii C S, per M mensurans S R seu F D: similiter & reliquæ, ut A R, per L, terminans R Q, vel D C: item D F per N, quæ metitur F H: & tandem F V per O, quæ mensurat altitudinem T V, vel H K; omnes scilicet in continua ratione sesquitertia. Factis igitur parallelis H ε & K ζ lineæ F α, & præterea Numeris,

ut vides,

ut vides, ſingulis ſuis locis inſcriptis; habemus & heic præter connexionem proportionis ſeſquitertiæ ſupra demonſtratam, etiam tria illa, quæ ultimo Noëm. pro veritate inventæ rationis $2\frac{1}{4}$ requirebantur; Nam & heic continua proportio ſeſquitertia ſervata, & aucta eſt. Secundo Symmetria quoque inter ſectiones & Catallela corniculata ubique convincitur, aut in ipſis numeris utrinque quadratis, aut ſurdi-Symmetris [ut heic ita vocare liceat] velut 3 Corn. & $6\frac{3}{4}$ ſect. multiplicati, dant veros numeros $4\frac{1}{2}$; Et ſic de cæteris. Tertio redire quoque numeros pro ſectionibus ordine inſcriptis manifeſtum eſt.

Concluſio Demonſtrationis poſterioris.

Quocirca non alia ratio dari poteſt inter ſectionem hexagoni & corniculatum eidem proxime ſubſcriptum, quam $2\frac{1}{4}$, Quæ erat propoſita.

C O R O L L.

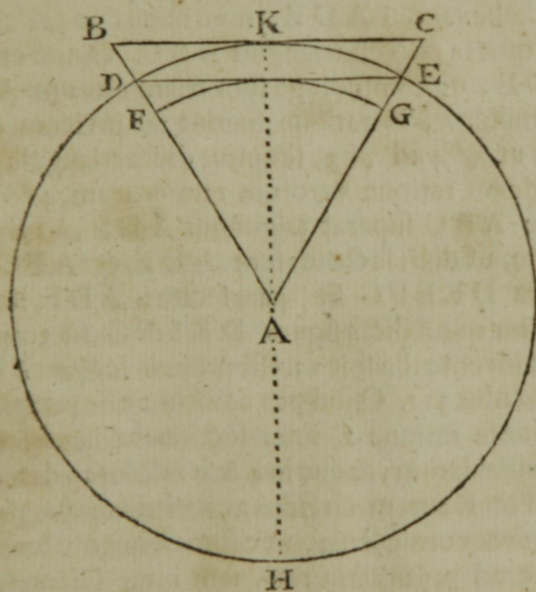
I Ex Diagoniorum inſcriptione cernitur, quemadmodum rectangulum aliquod diviſum ratione ſeſquitertia, ut rectangulum F Q diviſum in 3, 4, $5\frac{1}{3}$ Complementum exhibeat M Q 4, nempe tertiam partem de 12 ſectionis M γ, quæ eſt Corniculatum gradu inferius. Sic corniculatum D L $5\frac{1}{3}$ tertia pars eſt ſectionis ſupremæ L δ, &c. Ergo & corniculatum F M 4, quarta pars eſt ejuſdem ſectionis L δ 16.

II Datæ pro ſectione hexagoni lineæ cujuſcunque pars tertia, erit ut 3 ad illam, ſic 4 ad corniculatum reſpondens. Vnde alias adſumptas rationes inter ſectionem & Corniculatum corrigere atque ad veras reducere convenit: ut detur vel ſupponatur talis ratio $2\frac{1}{3}$; hac reſoluta fiunt 3 pro cornicul. & 7 pro ſectione; hæc mox falſitatis arguitur, ſiquidem 3 & 7 non ſunt Symmetri, ut factus ipſorum 21 oſtendit. Ad veram autem

autem rationem hoc modo reducatur $\frac{7}{3}$ id eſt pars tertia ſect. ut enim 3 ad $\frac{7}{3}$, ſic 4 ad $3\frac{1}{9}$ corniculatum reſpondens. Nam & heic $3\frac{1}{9}$ & 7, Symmetri, & in ratione $2\frac{1}{4}$ reperiuntur. Rurſus ſit data ratio $2\frac{1}{5}$. Ergo reſoluta ut 5 corn. ad 11 ſectionem. Sed neque hæc vera eſt, quod examen arguit. Nam ut 3 ad $\frac{11}{3}$, ſic 4 ad $4\frac{5}{9}$ corn. verum. Vt autem 5 & 11 non ſunt Symmetri, ſic $4\frac{8}{9}$ & 11 numeri ſunt commenſurabiles. Multiplicati enim dant $\sqrt{\frac{484}{9}}$ id eſt $\frac{22}{3}$, & ſimul ſunt in ratione ad invicem $2\frac{1}{4}$.

Conſtitutio Peripheriæ Circuli ex præmiſsis.

Fiat triangulum æquilaterum hexagonicum ut prius A B C,



cui inſcribatur arcus D E, iſque per totius Circuli ἐμβαδον ſeu

ſeu ambitum continuetur; ut peripheria ſuper A Centro ſit D E H, fiatque inſuper Diameter K H. Deinde ut ſupra, inſcribatur ſubtenſa D E, & ei rurſus inſcribatur arcus F G. Habemus igitur & heic Sectionem hexagoni D E, inter duo corniculata B C E D, & D E G F, quæ adinvicem ſuperius ſunt demonſtrata in ratione ſeſquitertia, hoc eſt ut 4 ad 3. Præterea quoque nunc inventa eſt Ratio ſectionis hexagoni D E, ad corniculatum D E G F dupla ſeſquiquarta, ſeu $2\frac{1}{4}$, hoc eſt, vel ut $2\frac{1}{4}$ ad 1, velut 9 ad 4. Quæ quidem ratio quia in omnibus ſectionibus hexagonicis, & corniculatis ordine continuatur, ut ſupra oſtenſum eſt. Quapropter, nos hic numeris in reſoluta ratione $2\frac{1}{4}$, hoc eſt ut 4 ad 9, utimur, quibus, ut decet, conjunctis, ſumma fit, pro figura [ut nobis vocatur] circulata, D K E G F 13, quæ quidem quarta pars eſt Sectoris hexagoni A D E, non minus atque trapezium B C D E quarta pars eſt trianguli A B C. Quum enim latera B C & D E, quæ homologa ſunt triangulorum A B C, & A D E ſimilium, in ratione fuerint ad invicem duplicata $\surd\, 1\frac{1}{3}$, ſeu ut $\surd\, 4$ ad $\surd\, 3$, ſequitur dicta triangula in eadem eſſe adinvicem ratione verorum numerorum 4 & 3; igitur triangulum A B C ſuperat trigonum A D E, $\frac{1}{4}$ ſui parte, in qua quoque, ut dixi, ſectores ſunt A D E, & A F G. Quum igitur figura D K E F G ſit $\frac{1}{4}$ pars ſectoris A D E, iſque $\frac{1}{6}$ circuli, ſequitur quod dicta figura D K E F G ſit totius circuli pars $\frac{1}{24}$. At inventa illa fuit 13. Eſt proinde ſector A D E, 52, & totus circulus 312. Quod pro conſtitutione peripheriæ circuli ex inventa ratione $2\frac{1}{4}$ inter ſectionem hexagoni & ſubjectum corniculatum, eaque in 4 & 9 reſoluta, demonſtraſſe oportuit. Poteſt autem circulus augeri minuique pro aſſumptis ſectione & corniculato, ut capite ſequente ſumus oſtenſuri. Nunc ad promiſſam rationem inter Diametrum dati circuli, & hujus circumferentiam properabimus, ſimiliter oſtendendam.

De

De inventione rationis Diametri ad datam Circuli peripheriam.

Quemadmodum Sectorem hexagoni A D E conſtat eſſe 52, præterea quoque corniculatum ſupraſcriptum B C E K D fieri $5\frac{1}{3}$, ſiquidem ut ſe habent 3 ad 4. Sic rurſus antea inventum corniculatum D E G F 4, ad hoc B C E K D $5\frac{1}{3}$. Quod eſt differentia inter Sectorem A D E 52, & triangulum A B C, quare etiam differentia inter arcum D E & latus hexagoni circumſcripti B C, è prima prop. Archimedis de Circulo, item prop. 5, cap. 2 Quadr. Circuli. Proinde numeris 52 & $5\frac{1}{3}$ ſimul additis, conſtituitur B C latus $57\frac{1}{3}$. Vt vero $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{3}$, ſic $57\frac{1}{3}$ ſeu quadr. $\sqrt{\frac{29584}{9}}$ ad D E, $\sqrt{2465\frac{1}{3}}$, qui numerus menſurat circuli dati 312 radium A K. Ergo hujus duplum $\sqrt{9861\frac{1}{3}}$ eſt Diameter quæſita K H. Invenitur quoque Diameter circuli hac proportione; nam ut B C latus hexagoni circumſcripti eſt ad K H Diametrum, ſic unitas ad $\sqrt{3}$. Quare multiplicato $\sqrt{\frac{29584}{9}}$ per $\sqrt{3}$, prodit Diameter ut prius $\sqrt{9861\frac{1}{3}}$.

Atqui ut hoc loco, fortaſſe, de duobus imprimis admoneam, quæ ambo in demonſtrationem cadunt, oportunum fuerit.

I Tangentem hexagoni, & arcum ſubſcriptum, ut hic latus B C, & arcus D E, Symmetros longitudine eſſe; nam B C $57\frac{1}{3}$ & arcus D E 52, ambo ſunt numeri veri. At deſcendendo, quia D E tangens erat $\sqrt{2465\frac{1}{3}}$, & arcus F G quia ſe habet ad arcum D E 52, ut $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{3}$, exit itaque F G, etiam in numerum ſurdum $\sqrt{2028}$, cui quoque D E $\sqrt{2465\frac{1}{3}}$ longitudine Symmeter eſt, utroque ſcilicet numero per ſurdum $\sqrt{3}$ ad vere quadratos revocabili. Quod certe heic de facili demonſtratum vides, in quo fere ſolo cap. tertium Quadr. circuli conſumitur, nam id eſt quod lineæ rectæ cum

circulari

circulari æqualitatem in natura conciliat. Sed de hiſce ulterius ſub finem cap. ſequentis acturi ſumus.

II Alterum eſt, quod dato circulo, ſeu ipſius circumferentia [ut ſemper hac praxi] in numero vero, ſemper Diameter in numerum ſurdum exit, quem quoque menſurat num. $\sqrt{3}$, aut huic Symmeter, haud ſecus atque in Quadrato accidit, quod datis coſtis in veris numeris, Diagonius exeat in ſurdos, ſemper numero $\sqrt{2}$ commenſurabiles. Et, verſa vice, utrobique.

Porro, inventa ſemel, ut heic, vera ratione Diametri ad ſuam Perimetrum, poteſt per eandem rationem, non modo data Diametro, in numero vero, ut ſæpius requiritur, peripheria acquiri, & vice verſa; verum etiam circulus augeri minuique pro imperata ratione, ut id lib. ſequ. commodius exemplis docebimus. Vnum hoc loco eſto; ſit Diameter circuli in vero numero 43, erit peripheria $\sqrt{18252}$. Etenim, ut $\sqrt{9861\frac{1}{3}}$ ad 312, ſic 43 ad $\sqrt{18252}$. Ratio autem perimetri ad ſuam Diametrum ex hiſce utriſque in ſolutis numeris eſt $\frac{3141859604427}{1000000000000}$.

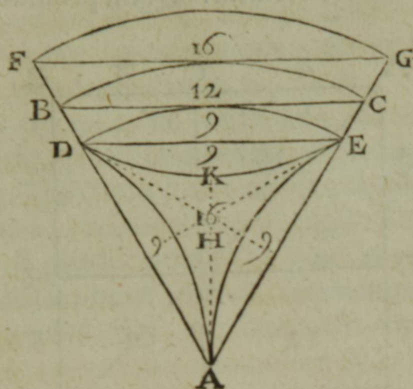
In contractioribus vero $\frac{1351}{430}$ quam proxime, velut in reſolutione horum irrationalium reperies, ceu numeri $\sqrt{\frac{18252}{43}}$. Sed de vere inventa Diametri ad ſuam perimetrum ratione plura infra cap. 5.

CAP. IV.

De ulteriore Demonſtratione Conſtitutionis peripheriæ circuli, &c. etiam per alios modos compendioſe.

PRoportionem ſeſquitertiam initio in hexagono Circuli analytice, ac poſtea Synthetice per ſimiles omnes ejus figuras demonſtratam, quomodocunque eandem ordine invertas, ſtabilem tandem, & perpetuam ad rotundi ſeu Circuli dimenſionem manere ulterius cap. hoc quarto palam faciemus,

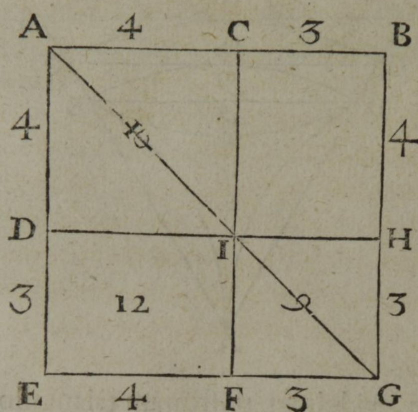
mus, ubi primo demonstrative convincemus, tria [ut superius coroll. I assertum est] corniculata, quamvis sectionem gradu secundo suprascriptam ingredi, & sic duas figuras diversas ejusdem hexagoni respectu, inter se esse æquales, ut in figura hexagoni subjecta.



Sit, ut in proximo hexagono Circulo adjuncto triangulum æquilaterum A B C $57\frac{1}{3}$; inventus autem Sector A D E 52. Corniculatum autem superius B C E D $5\frac{1}{3}$, cujus triplum 16; dico illud contineri tam in trilineo, A D E, in medio locato, quam in Sectione F G, supra D E sectionem secundo gradu distante, videlicet postquam triangulo A D E inscriptæ fuerint tres sectiones, quarum singulæ æquales sunt D E, 9 part. Descendant enim ex apicibus A D E tres lineæ rectæ normaliter in arcus oppositos, secantes se in medio, nempe in puncto H. Quoniam igitur lineæ D H & E H simul sumptæ æquales sunt lineæ B C: H K vero æqualis B D, vel C E; & tandem arcus D K E æqualis opposito D E, erit proinde trilineum D H E K æquale corniculato B C E D $5\frac{1}{3}$, & ideo tria hujusmodi trilinea, quæ eadem Demonstrationis vi reperiuntur in figura trilineari in medio trianguli æquil. A D E locata, æqualia sectioni hexagoni F G, heic 16 partib. mensuratæ, dum D E sectio est 9 part. per omnia, ut superius cap. 3 ista sunt demonstrata. Idcirco pro constitutione Sectoris A D E, seu arcus D E, denuo ad hanc hypothesin exigenda, quando trilineo isti A D E 16 adduntur quatuor æquales sectiones, quarum

DE eſt 9, rurſus exſurgit Sector nominatus hexagoni ADE, 52.

Idem admodum compendioſe & evidenter in quadrato cap. 1 hujus inſerto, & ad proportionem ſeſquitertiam diſtributo, cernitur. Quod proinde huc revocetur.



Illud quia ortum ducit ex latere AB in 4 & 3, ut vides, tributo, qui numeri ſunt in ratione ſeſquitertia, ergo plana inſcripta in proportione continua ſeſquitertia ſunt, adeo ut quando FH ponitur 9, erit complementum EI 12, & alterum quadratum circa Diametrum DC 16, Sectiones hexagoni ſupra cap. 3 poſitas prorſus repræſentantia. Quin etiam pro imperata ſuppoſitione FH, vel DC, peripheriæ circulorum in eadem proportione inde in reliquis ſubſecutura minuuntur, & augentur. Sunt enim plana heic circa Diametrum AG menſores Sectoris hexagoni circuli, dum FH ſectionem DE, DC vero trilineum in medio H figuræ antecedentis in debita proportione identidem referat, dum illa quater huic, ut ſupra, addatur. Conſtituto autem Sectore hexagoni figuræ anteced. ADE, non multum pro Diametro circuli eſt laborandum. Nam ablata ſectione DE, de Sectore ADE, remanet triangulum æquilat. ADE, cujus unum latus ut AD radius eſt Sectoris ADE, adeoque circuli totius continuandi: hoc autem latus AD ſe habet ad dictum triangulum, ſeu ejus Diametrum ut $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{3}$.

Exemplum

Exemplum in numeris usitatis, ubi sectio D E est 9. Hæc namque quater addita figuræ in medio 16 summam facit 52, videlicet totius Sectoris A D E mensuram. Rursus à Sectore isto A D E 52 sublata una sectione, ut D E 9, remanet triangulum A D E 43 part. ut autem $\sqrt{3}$ ad $\sqrt{4}$, sic 43 seu $\sqrt{1849}$ ad $\sqrt{2465\frac{1}{3}}$ radium Sectoris A D E, ut superius; Hujus autem numerus duplus, seu per $\sqrt{4}$ multiplicatus, dat integram Diametrum $\sqrt{9861\frac{1}{3}}$. vide supra cap. 3.

Aliud Exemplum hujus praxeωs, sit, ut 16 ad 9, sic 12 ad $6\frac{3}{4}$: hic postremus terminus, quia Sectio hexagoni est, ejus quadruplum 27 additum 12, constituit summam 39. A qua rursus dempta una Sectione $6\frac{3}{4}$, remanet pro triangulo seu Diametri ejus mensore $32\frac{1}{4}$, in quadr. vero $\sqrt{\frac{16641}{16}}$: hinc, ut $\sqrt{3}$ ad $\sqrt{4}$, sic $\sqrt{\frac{16641}{16}}$ ad radium hujus circuli $\sqrt{1386\frac{3}{4}}$. duplicatum $\sqrt{5547}$, qui est Diameter quæsita. Vel, pro Diametro tota compendiose habenda, ut $\sqrt{3}$ ad $\sqrt{16}$, sic triangulum A D E $32\frac{1}{4}$, hoc est, ut antea in quadr. $\frac{16641}{16}$, ad $\sqrt{5547}$ ipsam Diametrum, cujus circulus, seu cujus circumferentia est 234: Tot enim numeri oriuntur producto arcu Sectoris hexagoni antea constituti 39 in num. 6. Resolutio itaque totius hujus argumenti Cyclometrici originem ducit ex numeris 4 & 3, horumque quadratis $\sqrt{16}$ & $\sqrt{9}$, ut in quadrato proximo anteced. est manifestissimum, & in hisce exemplis quodammodo declaratum. Ad quæ ob datam proportionem seu potius rationem inter 16 & 9 numeros, qui circa Diametrum A G, infinita alia possunt excogitari ad Circulos cum suis Diametris sive augendos, sive minuendos.

Quinetiam ex transactione in eodem quadrato, alia producuntur analysin hujus argumenti respicientia; ut si medium ejusdem, quodcunque fuerit, ut hic est 12, dividatur per 3, quotus erit corniculatum 4, cujus Sectio est 9; diviso autem supremo termino (16) etiam per 3, oritur corniculatum ($5\frac{1}{3}$) corniculato (4) superius proxime. Item additis majore &

medio terminis, ut 16 & 12, constituitur inde semilunula trigoni 28; Sed differentia inter primum terminum 9 & medium 12, quæ est 3 medio addita, efficit semilunulam hexagoni 15. Summa harum semilunularum æqualis est triangulo A D E 43: Differentia vero 13 pars quarta Sectoris hexagoni, & $\frac{1}{24}$ totius circuli, velut lib. 2 hujus, oblata commoditate, ulterius demonstrabitur.

Porro in Disput. Cyclometrica de Mysteriis Numerorum 6, 7, 8, lunulæ sese offerunt, tam in ipsis numeris, quam ipsorum quadratis, his modis; primo in ipsis numeris: Adde 6 & 7, Summa erit 13, differentia Lunularum trigoni & hexagoni, quæ est $\frac{1}{12}$ pars circuli, ad quem Lunulæ istæ pertinent. Deinde adde 7 & 8, summa fit 15 Lunula hexagoni: Tertio adde 15 & 13, exsurgit inde Lunula trigoni 28. Quarto adde 28 & 15, fit summa Lunularum 43, æqualis lateri trianguli æquil. Circulo inscripti.

Secundo in ipsis quadratis Numerorum 6,7,8. Nam quadr. de 6 est 36, quadratus vero de 7 est 49; quorum Quadr. differentia 13 differentia est Lun. ut prius. Deinde quadr. de 8 est 64, differt à 49 per 15, quæ est mensura Lunulæ hexagoni. Cætera ut prius.

Denique in alia Disputatione Cyclomet. idem ostendi, fieri posse in propor. tripla & sexdupla, ut & Sector & triangulum exacte inde proveniant, velut:

4	12	36	Summa	52 Sector hexagoni.
1	6	36		43 trianguli æquil. inscriptum.

Et sic in Exemplis aliis omnibus, manentibus proportionibus & numeris variatis. Dum enim primus terminus proport. triplæ utcunque positæ dividatur per 4, secundus per 2, ultimo utrobique manente, fit è tripla, proportio sexdupla, ut heic vides.

Quas

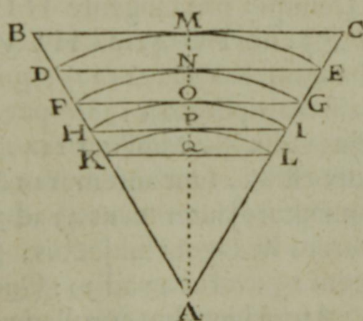
Quas proportiones omnes ſolutioni hujus famoſi Cyclometrici Problematis varie accommodandas, fons veræ Cyclom. è proportione ſeſquitertia luculenter per Naturam, velut rivulos effundit.

Vt nihil dicam de Æquatione Algebr. pro lunula trigonica & triangulo inſcripto æquil. &c. ſub finem Cyclom. Hamburg. pariter & Quadr. Circuli, triplici demonſtratione, per numeros inventa; quæ quidem vel una ac ſola Epicheiremati tali ſufficeret.

Cæterum forte præſtat, ulterius quam ſub finem cap. præced. demonſtrare, quemadmodum linea Circularis cum recta æquationem ſubeat. Quandoquidem ex eadem praxi percipitur, quomodo data alterutra, Circuli menſura denuo perficietur. Quare reducatur huc uſitata hexagoni figura, per quam ἀπόδειξις hujus commode abſolvitur.

PROPOSITIO.

In omni Circuli hexagono, latus circumſcripti velut tangens, ſe habet ad proximum inſcriptum arcum in integris numeris, ut 43 *ad* 39; *hoc eſt in ratione* $1\frac{4}{39}$.



Hanc autem rationem inter tangentem & ſubſcriptum arcum hexagoni, ſi placet, ordine demonſtrandam continuabimus, è ſuperioribus emanantem.

Primo igitur quia B C tangens, & arcus D E, oſtenſi ſunt ſuperius ad invicem eſſe ut $57\frac{1}{3}$ ad 52. Quod idem eſſe

dico ac ſi 43 ad 39. Nam utroque numero per 3 multiplicato, ſeu ad integros reſoluto, erunt, illic 172, hic 156. Quibus ſingulis per communem Diviſorem maximum 4 diviſis, relinquuntur quoti 43 & 39 in numeris integris, ut eſt propoſitum. Deinde pro tangente D E, cum ſuo arcu ſubſcripto F N G, quia eſt ut $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{3}$, ſic tangens B C, ad tangentem D E, hoc eſt, $57\frac{1}{3}$ ad $\sqrt{2465\frac{1}{3}}$; & ſic arcus D M E 52, ad arcum F N G $\sqrt{2028}$, velut hæc ſupra cap. 3 in iiſdem numeris demonſtrata ſunt. Vt vero ad Symmetros ſeu vere quadratos revocentur, uterque $\sqrt{2465\frac{1}{3}}$ & $\sqrt{2028}$ per $\sqrt{3}$ multiplicetur, & fit illic $\sqrt{7396}$, cujus radix eſt 86; hic vero $\sqrt{6084}$, cujus radix 78. Sunt igitur 86 & 78 in minimis numeris integris 43 & 39. Tertio pro tangente F G, & arcu H O I, quia eſt, ut $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{3}$, ſic $\sqrt{2461\frac{1}{3}}$ ad $\sqrt{1849}$, cujus radix quadr. 43; item ut $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{3}$, ſic $\sqrt{2028}$ ad $\sqrt{1521}$ cujus radix 39. Vel hoc modo, per numeros veros, in hoc caſu, ut 4 ad 3; ſic B C $57\frac{1}{3}$ ad F G 43; & ſic D M E arcus 52 ad arcum H O I 39.

Denique pro tangente H I, & arcu K P L, quia ut $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{3}$; ſic F G 43 ad H I $\sqrt{1386\frac{1}{4}}$, & ſic H O I arcus 39 ad arcum K P L $\sqrt{1140\frac{3}{4}}$, qui & ipſi numeri Symmetri ſunt. Nam multiplicato $\sqrt{1386\frac{3}{4}}$ per $\sqrt{3}$, erit verus quadratus $\sqrt{\frac{16641}{4}}$, cujus radix $\frac{129}{2}$. Similiter $1140\frac{3}{4}$ per $\sqrt{3}$, erunt $\sqrt{13689}$, cujus radix eſt $\frac{117}{2}$, ſunt autem 129 & 117 [remoto utrobique pari nominatore] inter ſe, ut 43 ad 39, ſic in tota hac ſerie tangens & arcus hexagoni ſubjectus, perpetuo ſunt in ratione ad invicem $1\frac{4}{39}$, vel ut 43 ad 39: Quod erat oſtendendum.

Atqui hinc duo corollaria emanant.

I Quod alibi demonſtratum eſt, nempe tangens hexagoni, & arcus ſubſcriptus proximus perpetuo ſunt inter ſe longitudine Symmetri. Vnde facile colligitur dari ſcilicet in Natura lineam rectam circulari æqualem, & vice verſa. Siquidem differentia hic inter 43 & 39, nempe 4, quoque eſt verus numerus.

II Dato

II Dato vel latere circumſcripto hexagoni, vel arcu ſubſcripto, & nunc cognita ipſorum inter ſe ratione $1\frac{4}{39}$: datur non ſolum circulus cum ſua peripheria; ſed etiam ejus Diameter. Vt ſit in proximo hexagono B C 1, erit arcus D E $\frac{39}{43}$. Nam ut 43 ad 39, ſic 1 ad $\frac{39}{43}$, quo numero per 6 multiplicato, conficitur totus circulus $\frac{234}{43}$, ſeu $5\frac{19}{43}$.

Porro, quia latus hexagoni circumſcripti ſe habet ad Diametrum, ut 1 ad $\sqrt{3}$, velut ſupra eſt oſtenſum: erit igitur Diameter circuli $\sqrt{3}$, cujus peripheria eſt $5\frac{19}{43}$. In reſoluto autem $\frac{234}{43}$, quando nominator 43 quadratur, fit $\sqrt{1849}$, quo numero multiplicato in $\sqrt{3}$, exit Diameter $\sqrt{5547}$ reſpondens Circuli peripheriæ 234.

C A P. V.

De collatione inventæ rationis Diametri ad ſuam peripheriam cum Archimedæa, item de cujuſvis ſectionis hujuſmodi peripheriæ inſufficientia.

COllatio inventæ ſuperius Rationis Diametri ad ſuam peripheriam cum Archimedæa non ideo heic inſtituitur, ut noſtram in dubium vocemus; ſed potius, ut omnibus conſtet, neminem, qui in hoc argumento ſudarat, hactenus inventum fuiſſe, qui quaſi medio inter terminos Archimedæos dictam rationem ſiſteret, ſive hypotheſi, ſive numeris uſus. Neque enim limites Archimedis ponimus heic $3\frac{1}{7}$ & $3\frac{10}{71}$ in paucos proxime numeros, ex ipſius Epilogiſmis extra intraque circulum, contractos; ſed eoſdem exquiſite retinemus, quos prop. 3 de Circulo nobis reliquerat, peripheria in 96 p. tributa, nempe extra Circulum, inventa Archimedi ratio eſt Diametri ad perimetrum, quæ eſt numeri, $4673\frac{1}{2}$ ad numerum 14688. Vnde poſita Diametro 10000000, fit peripheria 31428265.

Similiter

Similiter facta intra circulum operatione emergit Archimedi hinc ratio Diametri ad perimetrum, quæ eſt numeri $2017\frac{1}{4}$ ad 6336, calculo & heic ab aliis artificibus diligenter repetito. Sed poſita Diametro in hoc caſu 10000000, erit peripheria 31409095. Quum autem peripheria Archimedæa utrinque ad medium reducatur, fit ea 31418680; noſtra vero ſub finem cap. 3 inventa eſt 31418596.

Proinde differentia ſaltem eſt 00000048, qua noſtra media Archimedæa minor reperitur, manente utrobique Diametro 10000000. Atqui hanc differentiolam inter rationem Archimedæam limitatam, noſtramque Diametri ad circuli perimetrum, libenter Mathematicis dijudicandam relinquo, dum noſtram è præmiſſa, à Natura, proportione erutam, non etiam niſi potentia rationalem, ſuperius cap. 3, in veritate, deprehenderint. Sed quid Ludolpho de Cölln, Belgii olim miraculo, eo quod in numeris potentiſſimus fuerat, licet nullus à literis, reponamus? Dum enim hic circumferentiam circuli in polygona laterum 1073741824, id eſt pene infinitorum, ſecando, & Archimedem quodammodo imitando, praxin ſuam ad aloga ita in lib. de Circulo Belgice edito expediit, ut ſuppoſita Diametro, 10000000000000000 peripheria ex polyg. præmiſſis diduceretur, ad $\begin{cases} \text{extra } 3141592653589733. \\ \text{intra } 3141592653589732. \end{cases}$

Differentia, ut vides, tam vaſti numeri, in ſolam unitatem exeunte. Nec dubium, quin juxta ſuam methodum, quantum potuit, calculi errorem vitaverat. Nam & huic Clariſſimi alii Mathematici, nimirum W. Snellius Belga, & H. Briggius Anglus, præter alios, aſſenſum ſuum dederunt, Circuli videlicet fatum ſub aliam menſuram nunquam in veritate majore caſurum arbitrati, & propterea ambo me in hoc Cyclometrico argumento indefeſſo laborantem, litteris ſuis, dum vixerunt, à propoſito ſunt dehortati; Sed fruſtra, quum non minus, quam Eutocius olim Epilogo ſuo in Archimedem,

certo

certo ſcirem, nunquam hujuſmodi Sectionis pragmateia, ad Ludolphæam præciſionem in veritate perveniendum.

Certe cauſa Ludolphææ præciſionis, non in vaſtis illis numeris præmiſſis aſſerenda eſt; ſed potius in Dichotomia peripheriæ circuli prope infinitorum, nimirum in numeris 1073741824 polygonorum; Nam modo eadem ſectione uſus fuiſſet, & ſaltem Diametrum 100000 ſuppoſuiſſet, ſimiliter unitatis differentiam inter polygonum circumſcriptum & inſcriptum reperiiſſet. Vide F. Vietam lib. 8 Reſponſ. cap. 15.

Simile profecto ſecantibus iſtis accidere mihi videtur, ac ſi quis peripheriam circuli Mechanice filo æneo formatam, & poſtea in bilance ad certum pondus libratam, per dichotomiam multoties ſecaret, & inter ſecandum decidentes per limam raſuras defluere ſineret, tandemque affirmaret ſe ex minima relicta particula in ſuo pondere æſtimata, juſtum totius peripheriæ pondus Synthetice colligere, ac reſtituere velle. Sed ne ſpiſſum hoc ſimile, minime tamen impertinens, quemquam offendat, nos Apologiæ ſeu plenioris reſponſionis loco, Exordium quoddam, quod Diſputationi Cyclometricæ heic publ. olim præmiſimus, ſubjungemus, ut ſequitur.

Quum vera aliarum Artium principia curioſe ab initio exponi debeant; tum vel maxime Artes in demonſtratione ſitæ, qualis Arithmetica & Geometria eſt, atque hinc deducta Cyclometria, ita veris ſuis principiis innitentur, & homogenea homogeneis conferentur, ne in operationis progreſſu, magnitudines, quæ natura ſua exquiſite non comparantur, in devia nos ſucceſſive abripiant.

Oportet enim Mathematicum, quatenus Mathematicus eſt, Naturæ quantitativæ definiendæ, & poſtea corporibus, unde quantitates abſtractæ ſunt, ipſorumque ſuperficiebus, competenter rurſus accommodandæ, miniſtrum ſe præbere.

Ergo quod talis Natura non permittit, Mathematicus intentatum relinquet, niſi forte κατὰ τὸ ἐγγὺς, ut Eutocius loquitur,

ubi tamen nihil perfectum & absolutum cognoscere datur, mensuris, quibus quantitates metimur, inter se naturaliter diffidentibus; siquidem ab hisce inter se miscendis, ipse Euclides Mathematicorum parens ubique immunem se servabat; quæ quoque causa fuerat, cur nobis librum decimum de magnitudinibus irrationalibus tam prolixe ad imitationem Pythagoræ reliquerat.

Hanc vero διάσκεψιν per Cyclometriam sicubi unquam vere in lucem producendam, non solum ipsa ratio; sed etiam Authoritas præstantium Geometrarum nos præmonuerunt, ut est illustris Francisci Vietæ Fontenæensis Mathematici nostro seculo nulli secundi, tum alibi in Archimedis imperfectam Cyclometriam, tum sub initium supplementi Geome-
» triæ his verbis: Magnitudo tum demum data intelligitur,
» secundum analytica principia, quum ita exhibetur re, ut
» quemadmodum inter homogeneas sit affecta, innotescat.
» Idcirco idem Vieta lib. 8 Responsorum cap. 15, Nec Ar-
» chimedis Quadraturæ circuli Inventionem; nec Nicomedis
» ἔντεχνον esse censuit.

Porro C. Dibuadius M. S. in Cyclometriam Philippi Lansbergii idem ingenue confessus est, & quidem specialius de Canonis Trigonometrici insufficientia in argumento Cyclome-
» trico rite tractando his verbis: Problemata, quæ Geometri-
» cam certitudinem & factionem requirunt, ex propriis & ge-
» nuinis locis solvi debent; non ex peregrinis fontibus: Plana
» scilicet ex planis, solida ex solidis. Astronomica quæsita recte
» magnam partem per magnum Canonem expediuntur: Sed
» genuinum Geometriæ Problema ejus ope absolvere velle ri-
» diculum est, & non ferendum: Vt enim singula in rerum na-
» tura ex suis sibi appropriatis Principiis constant, ita in eadem
» resolvi debent; vel Synthetice ex propriis componi. Mere au-
» tem Geometricum Problema est *Quadratura Circuli*, dotari ita-
» que hæc filia suis genuinis debet opibus, si commode & ambitione

bitione procorum sit elocanda. Numeri, qui ex Canone Sinuum inducuntur, quem τὰ ἔγγιστα exhibeant, & non sint exacti, latentes errores ingerere possunt, utpote mutili perpetuo; Quod nemo ignorat, qui structuram Canonum expendit, vel ei rei perficiendæ manum adhibuit: Nec iis unquam *Commensurabile* & *Incommensurabile* deprehendi potest; Quod tamen summopere necessarium est persensisse, priusquam habitudines affingemus magnitudinibus, quæ nulla ratione inter se ad desideratam conspirare proportionem in rerum Natura volunt; Sed qui oriuntur ex rei Natura & Geometricis affectionibus Numeri, neutiquam errant, fallunt ac decipiunt.

Quin & idem Dibuadius defectum Canonis Sinuum in sua Geometria Numerali pag. 38, una cum multis aliis his verbis notat: Doctissimus [Clavius in fine Comm. ad lib 6 Euclidis] & alius eum secutus, Canonis Sinuum subsidio proportionem Archimedæa accuratiorem inquisiverunt; sed hoc incertum est per æque incertum demonstrare, & ignotum per ignotum declarare, talesque conatus cum partium Canonis Defectu intercidunt.

Hæc ille.

Amplius si rationi locum demus, & in causas hujus defectionis Canonis Trigonometriæ paulo accuratius intueamur, tres illius invenimus satis in numeris prægnantes, quarum

Prima est, quod Operatio pro Canonis istius Syntaxi in solis lineis rectis contingat, ex quibus tandem lineæ Circularis mensura illis, qui Cyclometriam Canoni accommodant, quæritur: Quod violentum est, & Naturæ contrarium. Quamvis enim linea curva seu circularis, rectæ possit esse æqualis [vel contra, recta in Natura peripheriæ circuli æqualis, ut Eutocius Comm. in Archimedem contestatur,] & ideo Circulus ipse æqualis rectilineo dari, ut in progressu ostenditur: tamen Circularis linea nunquam è rectis componi poterit, nisi hæ prius in puncta transiverint, quod fieri nullo modo potest;

Siquidem omnis linea in infinitum est secabilis; unde nemo mirari debet genuinam mensuram Circuli ampliorem paulo ea esse, quæ è rectis lineis ceu lateribus polygonorum adscriptorum conficitur. Cui rei Archimedes olim tacitum consensum attribuisse videtur, ponendo rationem peripheriæ ad diametrum circuli $3\frac{1}{7}$ aliquanto scilicet majorem ea, quam Sectionis praxis ipsi est largita. Vide 2 & 3 prop. Arch. de Circulo. Cui quoque æqualis est illa Euclidæa apud Heronem. Vide P. R. El. 2 lib. 19.

Secunda causa defectus Canonis est asymmetria longitudinis perimetri Circuli cum Diametro, rata satis ac vera, quæ facit, ut dum operatio in irrationalibus suscipiatur, idque per sæpius iteratam radicum extractionem, tunc plurimi Numeri quavis operationis vice excluduntur, quos radices veris proximæ non exhauriunt. Quando igitur dictæ radices de novo per radium Circuli ad plurimas siphras extensum juxta præcepti exigentiam multiplicantur, quis ignorare debet, insensibilem radicis ita in irrationalibus quæsitæ defectum, vel saltem in numero ejus finali, toties tunc augeri, quoties unitas in radio isto prolixiore reperitur?

Tertia denique hujus defectus causa est disproportio Sinus recti ac versi sub initium Quadrantis, ubi saltem per Canonem peripheriæ Circuli mensura statuitur. Qui quidem eo major est, quo διχοτομία vel quævis alia Sectio iteratior fuerit; Quod nec Ioh. Regiomontanum, nec Ioachimum Rheticum, nec denique Valentinum Othonem lib. 3, probl. 4 Oper. Palat. latuisse constat; Quodque certe Archimedi præcognitum fuit, Circulum ad plures quam 96 æquales partes, pro sua Cyclometria, haud sollicitanti.

Quoniam vero nullum prorsus discrimen agnoscimus inter fabricam Canonis Trigonometriæ, & Cyclometriam, scilicet è talibus Sectionibus conficiendam, proinde si quisquam præsumat, veram Circuli peripheriam eam esse, quæ inter polygo-

polygonum inscriptum & circumscriptum è talibus numeris utrinque confecta censebitur, hic parum profecto attendit, minimum errorem seu defectum, qui ex hisce præmissis causis penes latus minutissimum polygoni sic inventum, necessario resideat, toties in peripheria hinc fabricanda iterari, quoties unitas in Numero laterum omnium polygoni istius continetur.

Hisce debite consideratis, quum pro certo habeamus, nec Archimedem olim, nec quenquam alium, utut sectionis praxi fines Archimedæos plurimum egressum, veram Cyclometriam in Numeris irrationalibus unquam venari potuisse, vel lineam rectam peripheriæ Circuli æqualem: Quod etiam Eutocius in suo Epilogo Comm. in Arch. de Circ. aperte fatetur; Equidem quæ ante plures annos in hoc nobilissimo argumento, recte aliquando intra Symmetra claudendo, ac conficiendo, assiduis curis meditatus sum, non vereor nunc publ. censuræ exponere: Nec jure vereri me oportet, postquam viam insolitam per Naturam ingressus, ea requisita, eamque simul Methodum satis essem edoctus, quæ Epicheiremati huic sublimi quidem, & juxta plurimorum opinionem inveteratam, inventu impossibili, cæterum in Natura ipsa omnium facillimo, finem aliquando imponerent.

Hæc hactenus, quæ si Lector Benevolus, ac veritatis amans diligenter trutinaverit, iisque ea adjunxerit, quæ Cyclometriæ Hamburg. subjuncta sunt, videlicet de Canonis Trigonometriæ fabrica, ejusque sub initium & finem in Numeris restitutione [quæ tamen absque sensibili errore in analysi triangulorum accedit] non dubito, quin hanc Sectionis peripheriæ Circuli pragmateiam, scilicet ad eundem tam perfecte mensurandum, haut amplius probabit.

LIBER SECVNDVS

De Geodæſia Rotundi Plani, in lineis, & planis, varie inter ſe æquandis, augendis, minuendis, tranſmutandis, & menſurandis.

CAP. I.

De Enunciatis quibuſdam, plurimum à ſuperioribus deſumptis, & analyſi ſequentium inſervientibus.

I Similes figuræ ſunt in duplicata ratione laterum homologorum.

II Inter duo polygona æqualium laterum circulo circumſcripta, & inſcripta, medium proportionale eſt inſcriptum duplicatorum laterum.

III In regula proport. trium terminorum; ſi primus fuerit quadratus Numerus, tertius quoque quadratus erit; vel hi Symmetri, & medius quadratus.

IV In regula proportionis quatuor terminorum; ſi duo quivis termini Symmetri fuerint, & reliqui duo Symmetri erunt.

V Si Circulo figura quævis circumſcribatur, erit eadem ratio peripheriæ circuli ad ſummam laterum figuræ circumſcriptæ, quæ eſt areæ circuli ad figuram circumſcriptam; & contra, pr. 5, cap. 2 Quadr. Circuli.

VI Omnis trianguli æquilateri latus, ceu tangens, & arcus inſcriptus, ſunt inter ſe Symmetra; ſcilicet aut ambo in veris numeris, aut ſurdis longitudine Symmetris. cap. 4, lib. 1 hujus, item pr. 2, 4 & 9, cap. 3, Quadr. Circuli.

VII Partes circulo adſcriptæ nobis menſurantur, non heic cum vulgo Geometrarum in Quadratulis; Sed iis partibus,

bus, quibus circuli peripheria æqualiter dividitur. Exempli gratia: Sector circuli quod nobis superius fuit 52 p. idem in quadratis fit $1290\frac{95}{100}$ quam proxime, resoluto scilicet radio $\sqrt{2465\frac{1}{3}}$ & in dimidium 52, hoc est 26 multiplicato. Aliud Exemplum habes infra cap. 6.

VIII Diameter circuli longitudine incommensurabilis est ejusdem Circùli peripheriæ, ut supra cap. 3 hujus est demonstratum.

IX Si Diameter circuli tripletur, factus erit Dodecagonum Circulo eidem inscriptum, ut postea, cap. 5 hujus, Exemplo patebit.

X Eadem Diameter Circuli quadruplicata, gignit quadratum Circulo circumscriptum.

XI Quadratum circumscriptum circulo ductum in Dodecagonum eidem inscriptum, potest hexagonum circulo circumscriptum. Idem oritur ex multiplicatione Diametri in numerum $\sqrt{12}$.

XII Latus hexagoni circumscripti est ad Circuli Diametrum ut 1 ad $\sqrt{3}$.

XIII Si Diameter Circuli multiplicetur in numerum $\sqrt{9\frac{1611}{1849}}$, producitur ejus peripheria, secus quam Indi, qui è falsa sua hypothesi, perimetrum Circuli ad suam Diametrum rationem habere voluerunt, quæ est $\sqrt{10}$ ad $\sqrt{1}$ seu $\sqrt{\frac{10}{1}}$. Vide Iosephum Scaligerum pag. 38 Cycl.

XIV Hexagonum circumscriptum ad Circulum, & ejus peripheria ad Circuli peripheriam est ut 43 ad 39. Inscriptum vero hexagonum ad Circulum est ut 43 ad 52.

Notatu autem hoc loco dignum puto, quod illustris Hadrianus Romanus in Apologia pro Archimede adversus Iosephum Scaligerum prop. 4, pag. 111, ex ipso Archimede ostenderat; Circulum ad hexangulum inscriptum, rationem habere minorem, quam 1144 ad 945: Si ergo huic unitas adjiciatur, ut fiat 946, eadem fit in minimis numeris 52 ad 43

ad 43 ex invento nostro, & ratio quoque minuitur, ut vult autor.

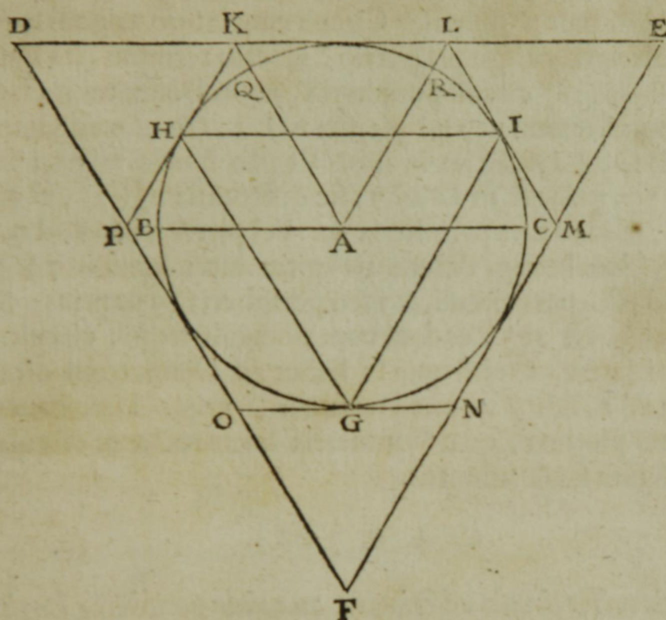
XV Lunulam trigoni & hexagoni mensurat simul latus trianguli æquilateri circulo inscripti; Differentiam vero earundem pars circuli seu ejus circumferentia $\frac{1}{12}$. Vide cap. 4, lib. hujus.

CAP. II.

De lineis rectis Circulo adscriptis, & Peripheriæ ejus Symmetris, ipsarumque cum peripheria Circuli subducta ratione, unde absoluta lineæ rectæ & Circularis æqualitas in Natura esse cognoscitur.

Archimedem pariter & Eutocium lineam rectam in Natura peripheriæ Circuli æqualem non frustra supposuisse hoc cap. è lib. 1 hujus, cum B. D. adhuc pluribus ostendemus, ut quoque in sequentium subsidium ac majorem illustrationem veniant, quæ ab illis, ipsarumque determinatis rationibus eliciuntur. Quo vero oculis melius percipiantur, sequentem figuram ipsis paravimus. Circulo G H I super centro A, & Diametro B C, circumscribantur, primo triangulum æquilaterum D E F. Deinde hexagonum K L M N O P. Ductis autem à Centro A, lineis rectis A K, & A L, in terminos lateris hexagoni circumscripti, secantibus circulum, seu hujus peripheriam in Q & R. Quoniam igitur arcus Q R, ex cap. 3 & 4, lib. 1 hujus, est 52 p. dum K L fuerit $57\frac{1}{3}$, Symmetræ proinde hæ lineæ sunt, & ipsarum ratio $1\frac{4}{39}$. Quæ quoque est totius peripheriæ Circuli ad summam laterum dicti hexagoni circumscripti. Plura extant cap. 4, lib. 1. Porro quia latus trianguli æquilateri circumscripti D E, tripla est K L $57\frac{1}{3}$, proinde D E est 172, Circuli autem peripheria 312 p. dum arcus Q R 52 sexies adsumitur.

mitur. Habebunt igitur ſe peripheriæ Circuli, nempe 312 ad DE 172, in ratione $1\frac{35}{43}$. Amplius quoniam latus trianguli in-



ſcripti æquil. HI, dimidium eſt lateris circumſcripti DE. Quare hujus cum peripheria ratio eſt $3\frac{27}{43}$, quæ eadem eſt ſummæ lunularum trigoni & hexagoni cum Circulo, ſeu ipſius peripheria. Quarum differentia eſt $\frac{1}{12}$ pars circuli, aut hujus peripheriæ; Lunula autem trigoni ſemper ſe habet, ad Lunulam hexagoni, ut 28 ad 15 in integris Numeris, hoc eſt in ratione $1\frac{13}{15}$. Has equidem rationes rectarum linearum, quæ peripheriæ Symmetræ fuere, item Lunularum cum Circulo, etiam ad id conducere video, ut ſuppoſito uno, in quocunque alio Numero ſeu magnitudine, primum Circuli compe-

tens peripheria, deinde ejus diameter in Numeris diſpalèſcat. Exempli gratia: Supponatur D E latus trianguli æquilateri circumſcripti 9 p. Vnde tam peripheria circuli, quam Diameter quærantur; igitur ratio $1\frac{35}{43}$ reſoluta numeros ſtatuit 78 & 43, qui ſunt peripheriæ Circuli cum latere trigoni æquil. circumſcripti; Ergo proportio, inverſo termino, ita ſtatuit 43—78—9 ($16\frac{14}{43}$ circuli peripheria, cujus Diameter ita facile invenitur: Etenim, ut 1 ad $\surd 3$, ſic K L 3, ſeu $\surd 9$ ad Diametrum B C $\surd 27$. Et ita in aliis. Vt eſto lunula trigoni ſuppoſita 7 p. quia eſt ut 28 ad 7, ſic differentia 13 ($3\frac{1}{4}$, id eſt $\frac{1}{12}$ circuli, & ideo tota peripheria 39. Vel plenius, ut 28 ad 7, ſic 15 ad $3\frac{3}{4}$ lun. hexag. differentia igitur inter lunulas 7 & $3\frac{3}{4}$, eſt $3\frac{1}{4}$ id eſt $\frac{1}{12}$ pars circuli, & ideo peripheria 39 ut prius: Sed ſumma lun. eſt $10\frac{3}{4}$, eadem cum trianguli æquil. circulò 39 inſcripti latere. Quod quia ſe habet ad Diametrum circuli ut $\surd 3$ ad 2, ſeu $\surd 4$, erit Diameter $\surd 154\frac{1}{12}$. Hæc paucula ſunt inter plurima, quæ Symmetria lineæ rectæ & circularis in hac figura facile admittit.

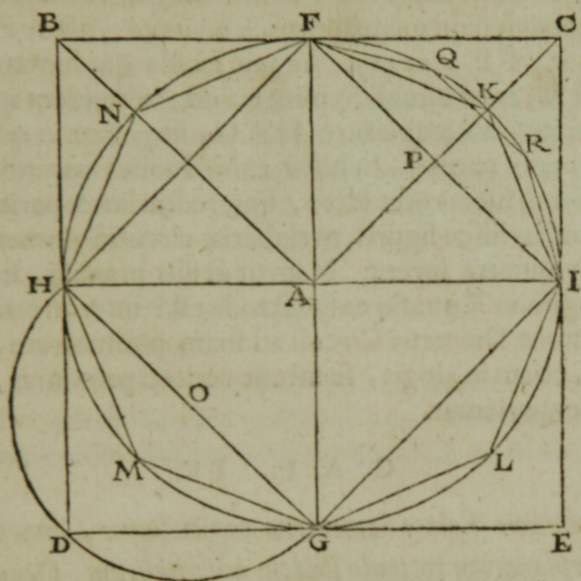
C A P. III.

De lineis rectis circulo adſcriptis, quæ quia peripheriæ longitudine ſunt incommenſurabiles, inutiles reperiuntur, ad exquiſitam Circuli menſuram.

QVoniam Diameter Circuli peripheriæ ejuſdem potentia, & non etiam longitudine, eſt rationalis, proinde quia nulla abſoluta æquatio ex iis rectis lineis cum circulo, & ejus partibus, fieri poterit, quæ immediate à Diametro irrationali deſcendunt, igitur fruſtra hactenus pro Circulo menſurando ab aliis ſunt adhibitæ. Hæ autem ſunt, quæ circuli quadrantem aut tangunt aut ſubtendunt, ut de infinitis aliis polygonis peripheriæ incommenſurabilibus heic nihil dicam; ſufficit

enim

enim in quovis præcedentium triangulo æquilatero, λαβὰς τῆς κυκλομετρίας ἐχεῖν; ſed & his alogis ſequentem figuram adſignamus. Retento circulo ſuperiore, & ejus peripheria 312 p.



item Diametro hujus $\sqrt{9861\frac{1}{3}}$ è cap. 3, lib. 1: eidem primum quadratum circumſcribatur B C E D. Deinde inſcribatur quadr. H F I G. Item octogonum F K I L G M H N, &c. Quia vero nullæ hujus ſchematis lineæ rectæ longitudine rationales fuerint peripheriæ circuli, nullæ proinde ejuſdem figuræ in plano ſive extra ſive intra circulum, areæ circuli ſunt Symmetræ. Primo enim quoniam B C latus quadrati circumſcripti, Diametri $\sqrt{9861\frac{1}{3}}$ menſuram obtinet, tangentis ſcilicet arcum quadrantis N F K, eſt irrationale longitudine toti circulo 312, erit quoque ad quadrantem hujus 78

 aſymme-

aſymmetrum. Proinde neque corniculatum B C K F N areæ circuli Symmetrum eſt, è pr. 5 cap. 2 Quadr. Circuli. Idem de inſcripto quadrato F I G H affirmandum; nam F I dimidium eſt Numeri quadrati, Diametri circuli H I, nempe $\sqrt{4930\frac{2}{3}}$. Nec denique latus F K Octogonii inſcripti rationale, eſtfit enim illud ex quadratis A K $\sqrt{2465\frac{1}{3}}$ — A P $\sqrt{1232\frac{2}{3}}$, & quadr. F P $\sqrt{1232\frac{2}{3}}$. At nec lunula quidem quadrantis G D H M areæ circuli Symmetra eſt: Siquidem ipſa æqualis eſt triangulo æquicruro H A G, ut poſtea in reſolutione figuræ hujus patebit. In hiſce enim duobus capitulis ſaltem propoſitum fuerat oſtendere, quæ rectæ lineæ pariter & plana in duabus hiſce figuris, peripheriæ circuli Symmetra, quæque aſymmetra forent. Nam ut in illis præciſa, ſic in hiſce nulla legitima Æquatio exſpectanda eſt: interim tamen nunc data ratione Diametri Circuli ad ſuam perimetrum, Æquationes, etiam in alogis, ſe ſiſtunt veritati proximas, ut infra Cap. 5 experiemur.

CAP. IV.

De reſolutione figuræ Symmetræ cap. 2 hujus, quoad Geodæſiam planorum rotundo ibidem adſcriptorum; Deque Lunularum trigoni & hexagoni magnitudine & differentia, in quibus quoque plani rotundi menſura conſiſtit. Exemplo denique, quo oſtenditur Circuli veri cum ſacris litteris in Numeris convenientia.

GEodæſia rotundi in plano, ideo nec ab Archimede, nec ullo alio hactenus in ſuis particulis contentis, rite ad Numeros erui potuerat, quia nec inter peripheriam Circuli, lineis rectis ſupra oſtenſis longitudine rationalem, & Diametrum ejus, iiſdem rectis longit. irrationalem diſcernere datum fuerat. Rotundo autem plano, hoc eſt, Circulo, varia

adſcripta

adſcripta contenta, etſi ſingula baſes multarum rerum ſolidarum, ſeu corporum pro figurarum dictarum diverſitate, artificioſe exſtruendorum, eſſe poſſint; tamen quia in Geodæſia plurimum, & interdum neceſſarium uſum habent, proinde ad eandem merito appellationem ſuam referunt; Sed ad propoſitum veniamus. Schemate cap. 2, heic repetito, & paululum aucto.

Retenta integri Circuli menſura, prout ſupra inventa fuit 312 p. cujus quidem $\frac{1}{24}$ pars eſt Circulata figura V X Z Y 13, ut ſupra inventa eſt, compoſita videlicet ex — 9 ſectione V X, & 4 Corniculato infra ſcripto V X Z Y. Hæc ſeqq. elicientur.

I *Hexagonum circumſcriptum.*

Quia K L linea inventa fuit $57\frac{1}{3}$, ea itaque ſexies iterata fit ambitus hexagoni circumſcripti 344, ſimulque hexagonum ipſum ordinatum circumſcriptum K L M N O P.

II *Corniculatum ſuperius.*

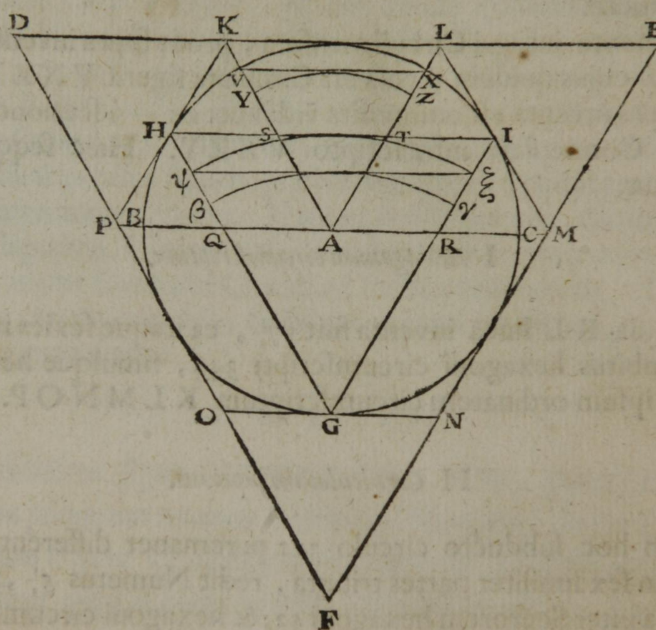
Ab hoc ſubducto circulo 312 p. remanet differentia 32, qua in ſex ſimiliter partes tributa, redit Numerus $5\frac{1}{3}$, differentia inter Sectorem hexagoni 52, & hexagoni circumſcripti partem ſextam.

III *Hexagonum inſcriptum.*

Quia autem triangulum æquil. A V X, pro inſcripti hexagoni $\frac{1}{6}$ parte habendum, ſe habet ad A K L, ut 3 ad 4, hoc eſt in ratione ſubſeſquitertia, erit illud 43, & totum hexagonum inſcriptum 258.

IV *Triangulum æquil. circumscriptum.*

Porro pro triangulo æquilatero circumscripto D E F, quia D E tripla est K L, id est 172 p. hoc igitur Numero pro



laterum summa triplicato, exit triangulum circumscriptum D E F 516 p.

V *Triangulum æquil. inscriptum.*

Cujus quarta pars est triangulum æquilaterum inscriptum G H I 129 p. Et quia dicti trianguli æquil. inscripti latus H I 86 p. superans K L $57\frac{1}{3}$ parte sesquialtera, erunt ipsa triangula

triangula æquil. H I G, & K L A, in ratione ad invicem $2\frac{1}{4}$, hoc eſt ut 9 ad 4. Et quia eadem ratio fuit Sectionis hexagoni V X ad Corniculatum inſcriptum V X Z Y. Quocirca inverſa proportione, erunt dicta Sectio V X & Corniculatum $\psi\,\xi\,\beta\,\gamma$ inter ſe æqualia. Quæ nimirum convenientia triangulorum, æquilaterorum rectilineorum cum circularibus ad eandem rationem ſtabiliendam in ipſa Natura nobis revelatur. Nam poſito triangulo æquil. inſcripto H G I 9, erit K A L vel O F N 4, id eſt ratio Sectionis hexagoni quæſita ad ſubjectum Corniculatum.

VI *Sectio Trigoni inſcripti æquilateri.*

Amplius in præfinito Circulo 312 p. Sectio trigoni inſcripti H V X I quæritur facilime hoc modo. Etenim ſublato de Circulo 312, triangulo æquil. inſcripto, 129, reſidui ſunt Numeri 183, quorum $\frac{1}{3}$ nempe 61 eſt dicta Sectio H V X I.

Lubet adhuc æqualitatem trilinei B Q H, & H S V per numeros experiri. Igitur ſubtracto triangulo æquil. Q G R $57\frac{1}{3}$ de ſemicirculo B G C 156, reſidua ſunt, trilineum B G Q, & C G R; ſimul $98\frac{2}{3}$, ſingula $49\frac{1}{3}$. quo rurſus ſublato ab invento ſuperius trigoni 61 fit quæſitum trilineum B Q H $11\frac{2}{3}$, Ejuſdem magnitudinis eſſe H S V ita quoque numeris probatur: totum triangulum æquil. H S K quarta pars eſt trianguli K A L $57\frac{1}{3}$. Ergo illud eſt $14\frac{1}{3}$, à quo ablato ſemicorniculo H V K $2\frac{2}{3}$ [quum totum antea inventum fuerat $5\frac{1}{3}$] redit Numerus $11\frac{2}{3}$, etiam pro trilineo H S V.

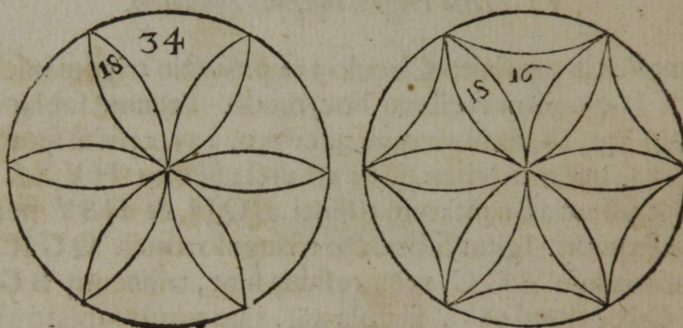
Reſtant adhuc primo quadrilaterum S Y Z T: quod relinquitur ex $\frac{1}{4}$ parte Sectoris A V X 13, & $\frac{1}{4}$ triangul. K A L nempe $14\frac{1}{3}$, quibus additis fit ſumma $27\frac{1}{3}$, eaque ſubducta à Sectore A V X 52, remanet quæſitum quadrilaterum S Y Z T $24\frac{2}{3}$.

Denique pro $\beta\,\gamma$ R Q, quia Sector G $\psi\,\xi$ ſe habet ad

Sectorem

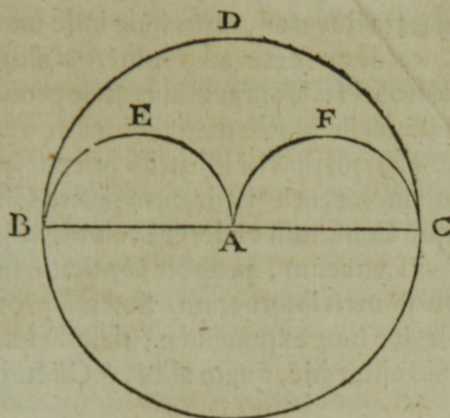
Sectorem A V X, nempe 52, ut 9 ad 4, erit ille 117 p. à quo ſublata quarta ejus parte $\psi \xi \gamma \beta$ $29\frac{1}{4}$, item triangulum æquil. Q G R $57\frac{1}{3}$, quorum ſumma eſt $86\frac{7}{12}$, remanet quæſitum $\beta \gamma$ R Q $30\frac{5}{12}$. Et ſic in cæteris, ut dato circulo, vix ullum planum ipſi ſic adſcriptum in Numeris veris latere nos poterit. De cæteris autem pro quavis parte imperata Circulo auferenda infra docebimus.

Quia vero Circulus baſis eſt omnium Cylindraceorum corporum, operæ precium eſt, unam & alteram, inter plurimas figuras, hic adnotare, quarum ſingularum magnitudines



Circulo cognito, ex antecedentibus patent. Nec difficile eſt alias in forma quacunque excogitare, & dato Circulo, ſingulas ſuis magnitudinibus Numeris definire, quæ baſium loco eſſe poſſunt. Paradeigmata nobis præbuit olim Celeberrimus F. Vieta lib. 8 Reſponſ. cap. 11. Ipſa autem omnia ſive Arbeli ſive Lunulæ fuerint, facilem in Numeros analyſin admittunt, Circuli per Sectiones parteſque ſuas menſura jam inventa. Vt eſto juxta primam prop. dicti cap. 11, deſcriptio Arbeli primi generis in Numeros præciſe reſolvendi.

Verba Celeb. Vietæ hæc ſunt: Deſcribatur Circulus ſuper A centro, & agatur Diameter B A C, & fiunt A B, A C ſingulæ



gulæ dimetientes Circulorum, ipſique deſcribantur Circuli. Sunt igitur Semicircumferentiæ ſuorum Circulorum, ſingulæ B C, B A, A C, curvæ lineæ. Quapropter Spatium C D, B E, A F eſt Arbelus, ſcalprumque Sutorium. Hactenus Vieta.

Nos autem ſingula per Numeros præciſe determinabimus, menſura è lib. 1 hujus deſumpta. Ergo dato Circulo B D C 234, erit hujus Diameter B C $\surd 5547$, Cujus dimidium, nempe B A, vel A C eſt $\surd\, 1386\frac{1}{4}$. Quia vero major Semicirculus eſt 117, nempe B D C, erunt eidem peripheriæ duorum Semicirculorum B E A, & A F C æquales. Sed dicti modo Semicirculi, quia ambo dimidii ſunt Semicirculi B D C, quippe ſinguli $29\frac{1}{4}$, ſimul $58\frac{1}{2}$, ideo Arbelus C D B E A F, æqualis eſt dictis Semicirculis, utpute $58\frac{1}{2}$.

Atque ita data ratione Peripheriæ Circuli ad ſuam Diametrum, in quacunque data unius harum menſura, mox reliqua præciſe in numeris prodeunt, quorumcunque vel Arbelorum, vel Lunularum genera fuerint.

De Lunulis Hexagoni, & Trigoni.

Has equidem Lunulas pro Circuli menſura primus, quod ſciam, introduxeram; Nam quas in hoc genere, pro eodem menſurando, Celeberrimus olim Ioh. Baptiſta Neapolitanus

G lineis

lineis tractaverat, ratus hinc inde mensuram Circuli invenisse, easdem recte ad Numeros alogos revocatas Camillus Gloriosus Italus non minus ab ingenio, quam alogorum exercitatione in Mathematicis incomparabilis, prorsus confecerat. Ob quam viri istius in hisce scientiam, semper mihi in voto fuerat, ut Quadratura nostra Circuli sub ipsius incudem atque Censuram caderet; velut quoque ad Galilæum de Galilæo Lynceum, propter Opticum suum, orbi notissimum, litteris meis inserueram. Sed ad propositum ubi primum lunulæ hæ sunt exponendæ; deinde ipsarum differentia à nobis paulo aliter hic, quam alibi, $\frac{1}{12}$ Circuli pars ostendenda.

Notæ sunt in hoc Schemate Lunulæ hexagoni B G D F, Trigoni D K C L, quæ ambæ æquales sunt triangulo rectangulo B D C, remotis scilicet Sectionibus B D hexagoni, & D C trigoni: At quia triangulo eidem B D C per omnia æquale est triangulum A B E, quod mensurat latus B E æquale inscripto D C, ambo vero seorsim mensurant duo

duo hexagona inſcripta, quorum unum eſt B A D, ambo autem contenta in Rhombo A D L C.

Cæterum differentiam dictarum Lunularum eſſe $\frac{1}{12}$ partem circuli maximi, cujus centrum A paulo aliter nunc, quam cap. 6, prop. 6 Cyclometr. Hamburgenſis, demonſtrabimus.

Manifeſtum eſt rhombum A D L C ambas Lunulas includentem, comprehendere duas Lunulas hexagoni ſeu ipſarum magnitudines, una cum Sectore trigoni circuli A δ I γ. Eſt proinde idem Sector differentia harum lunularum quæſita. Quia vero A δ I γ ſe habet ad ſectorem trigoni Circuli maximi, ut 1 ad 4. Ergo ad totum Circulum maximum ut 1 ad 12. Et proinde $\frac{1}{12}$ ipſius, quod erat oſtendendum. Sic habemus & ſummam harum Lunularum, nempe hexagoni ac trigoni reſpectu rectilinei ſeu lateris triang. æquil. inſcripti, & ipſarum differentiam reſpectu Circuli. At nihil commodi hinc pro Circulo menſurando affertur, niſi etiam magnitudines ſingularum, utut Symmetriam rectilinei cum Circulo ſtabiliunt. Equidem quamquam Cap. 7 Quadr. Circuli, plurimus fuerim, ut rationem harum Lunularum ad invicem cognoſcerem: tamen id mihi ex poſteriori contigerat, & vel maxime in myſteriis Numerorum, 6, 7, 8; ubi veriſſima ipſarum Ratio, inventa eſt $1\frac{13}{15}$ ut libr. 1, cap. 4 hujus manifeſtius reliqueram. Reſoluta autem heic ratione $1\frac{13}{15}$ fiunt Numeri pro trigoni Lun. 28, pro hexagoni 15. Quorum Summa pro triangulo A B E, vel B E 43; Differentia vero 13, pro $\frac{1}{12}$ parte Circuli B A T; Vnde totus Circulus vel hujus perimeter 156; Et quia ut $\sqrt{3}$ ad $\sqrt{4}$, ſic 43 ſeu $\sqrt{1849}$ ad Diametrum Circuli hujus, erit igitur hæc $\sqrt{2465\frac{1}{3}}$.

Quoniam vero dictæ lunulæ ejuſdem ſunt altitudinis, idcirco eaſdem in hoc Schemate, ut vides, conjunxi, ut planorum æqualitatem oſtenderem, in B A T Sectore, quo utrinque Lunula Trigoni Lunulam hexagoni ſuperat, cujus differentiæ dimidium eſt trilineum B S T: vel O S N æquale $\frac{1}{24}$

circuli ſeu Circulato T N Z X. Ad hoc autem Exemplum de facili eſt per Lunulas haſce Circulum menſurare, ſolum latere trianguli æquil. inſcripto pro lubitu conceſſo, quam praxin Tyronibus exercendam relinquo.

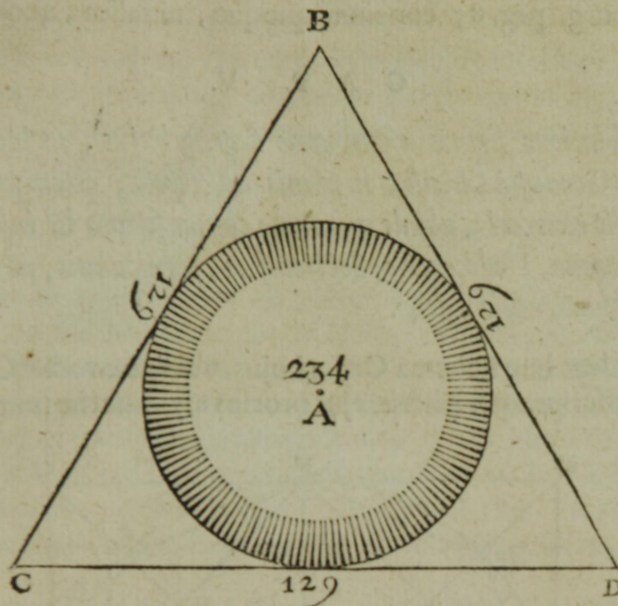
Exemplum Hieroglyphicum, ubi perfecta Circuli menſura, S. S. Scripturæ allegorice in Numeris famulatur.

Notum eſt non ſolum apud Platonem in Timæo, ſed etiam Aſtrologos cauſarum in Natura, & conſpirationis ſuperiorum cum his inferioribus ſolicitos inquiſitores, *Triangulo Aequilatero* nimirum præ omnibus aliis figuris vim quandam divinam ineſſe, imo ſi ullis aliis, ſanctæ & individuæ Trinitatis myſterium.

Præterea manifeſtum eſt è ſuperioribus, ipſum triangulum æquil. Circuli rite menſurandi fundamentum in ſolo hexagono extitiſſe. Ergo omnium maxime, quando tale triangulum, rotundum includit, quod Orbis, terræ, ſolis, ſiderum & univerſi cæli finiti ſimilitudinem refert. Hoc igitur triangulum, quantum à Circulo comprehenſo in Numeris diſtat, operæ precium eſt è ſuperioribus didiciſſe; non quidem in omni dato Circulo, ſed ſolum eo, qui ut ſupra cap. 4, lib. 1, primario rationem inter latus hexagoni, & inſcriptum arcum ejuſdem, vel inter ipſum hexagonum circumſcriptum, & inſcriptum Circuli Sectorem, nempe $1\frac{4}{39}$, vel ut 43 ad 39 actu conſtituerat. Hujus autem Circuli Triangulum circumſcriptum ex ſuperioribus eſſe 387. Inſcriptum vero Circulum 234, & ideo differentiam 153 ſequens figura oſtendit, cujus circuli diameter eſt $\sqrt{5547}$. Vide cap. 4 lib. 1.

Quæ quidem figura textui D. Iohannis Euangeliſtæ cap. ult. v. 11, cur applicari non poteſt, non video; Etenim Chriſto Salvatore noſtro, poſt Reſurrectionem ſuam glorioſam apud mare Galilææ præſente ac jubente, tot piſces Petrus è

mari



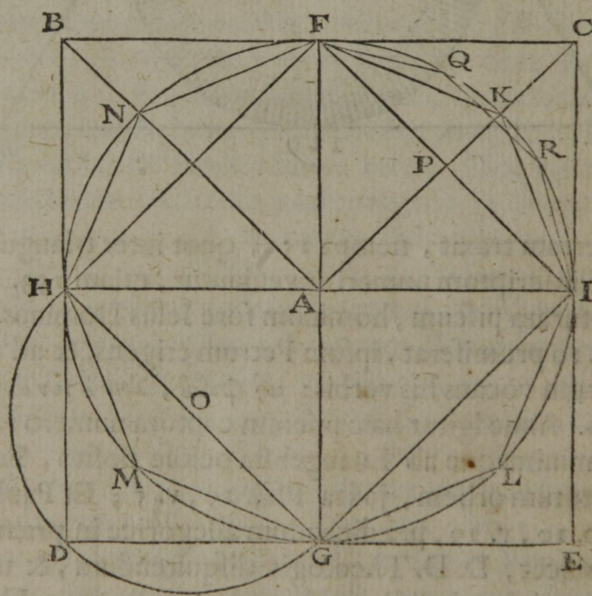
mari in terram traxit, nempe 153, quot inter triangulum & Circulum inſcriptum numeri inveniuntur, etiam 153. Anne Petri capturam piſcum, hominum fore Ieſus Dominus noſter Luc. 5, v. 10 promiſerat, ipſum Petrum erigens, & ad munus Apoſtolicum vocans his verbis: μὴ φοβοῦ, ἀπὸ τοῦ νῦν ἀνθρώπους ἔσῃ ζωγρῶν. Anne igitur hæc piſcium captura numero tam exquiſito, minimeque ab Euangeliſta ocioſe poſito, Euangelium per totum orbem, juxta Pſal. 19, v. 5; Et Paulum ad Rom. cap. 10, v. 19, prædicandum allegorice in præmiſſa figura ſignificet, D. D. Theologis diſquirendum, & ulterius à gnaris & minime invidis explicandum relinquo. Heic autem mihi ſufficit, quod in vera Circuli menſura ſic occurrebat, haud oſcitanter præteriiſſe, ut neque antea ex numeris

Apocalyseως ejusdem Iohannis, quibus πεϱιςὸν Cyclometriæ Hamburg. pag. 85 concinne quoque, ni fallor, accommodatur.

C A P. V.

De resolutione figuræ asymmetræ Cap. 3 hujus, ut inde quoque Geodæsia Circuli, in planis adscriptis, quam proxime poßit exerceri; ubi de quadrato circumscripto & inscripto, octagono, Dodecagono, Sectionibus, corniculatis, ac Lunulis Quadrantis agitur.

Redeat huc Schema Cap. 3 hujus, ubi lineæ rectæ Circulo adscriptæ peripheriæ ejus prorsus asymmetræ sunt osten-



sæ; Diametro autem imprimis latus quadrati circumscripti Symmetrum.

De

De planis hujus figuræ nihilominus pro Geodæſia ipſius nobis in ſeqq. ratiocinandum.

Primo de quadrato circumſcripto; deinde inſcripto; tertio de octogono inſcripto; quarto de Dodecagono inſcripto; quinto de Sectione quadrantis: Sexto de Corniculo: Septimo de Lunula quadrantis.

I *De Quadrato circumſcripto.*

Primo heic monendum eſt, nos in Exemplo uſitato pro planis hiſce dimetiendis manere, ubi Peripheria Circuli eſt 312 p. cujus Diameter inventa fuit $\surd\, 9861\frac{1}{3}$. Igitur pro Quadrato circumſcripto B C E D, quia ex quatuor Diametris Circuli conſtat, quadruplico Diamet. $\surd 9861\frac{1}{3}$, hoc eſt in 16 multiplico, factus inde $\surd\, 157781\frac{1}{3}$ eſt quadratum B C E D circumſcriptum, cujus circulus inſcriptus eſt 312. Eſt proinde Quadratum circumſcriptum ſemper Circulo incommenſurabile.

Quoniam autem alias Quadr. circumſcriptum eſt $9861\frac{1}{3}$, remoto ſigno $\surd$; Proinde Circulum quadrabis multiplicata ipſius quarta parte, nempe 78 ſeu $\surd\, 6084$ in Diametrum $\surd\, 9861\frac{1}{3}$. Vnde fit area Circuli $\surd\, 59996352$. Dico nunc: ut Numerus $9861\frac{1}{3}$ ſe habet ad Num. $\surd\, 59996352$, ſic ſe habet Numerus $\surd\, 157781\frac{1}{3}$ ad Num. 312.

Cæterum faciliore longe in ſuperioribus computatione. Dum enim ad Rationem inter quadratum circumſcriptum, & circulum attendamus, quæratur radjx quadr. de $\surd 157781\frac{1}{3}$ quæ proxime eſt $397\frac{217}{1000}$. Habet igitur ſe quadratum circumſcriptum ad circulum, ut $397\frac{217}{1000}$ ad 312, quam proxime, hoc eſt, ut 14 ad $10\frac{395830}{397217}$. Archimedes habet; ut 14 ad 11, prop. 2 de Circulo, dum ſcilicet Diametrum Circuli ad peripheriam ponit, ut 7 ad 22 ſeu, in ratione $3\frac{1}{7}$. At ex illis datis quam facile fuerit juxta Methodum noſtram modo præmiſſam, ratio-

nem

nem Quadrati ad Circulum inſcriptum elicere, mox hic do-
cebimus. Sit igitur in figura antecedente F G Diam. 7, ea-
que per 4 multiplicetur, fiuntque 28. Circulus autem 22, qui
ambo in minimis Numeris ſunt ut 14 ad 11.

II *Pro Quadrato inſcripto.*

Hoc nimirum F I G H ſubduplum eſſe Quadrati circum-
ſcripti ad oculum demonſtratur. Eſt autem hic in Nume-
ris √ $39445\frac{1}{3}$.

III *Pro octogono inſcripto & ejus Sectione.*

Per 2 Enunciat. cap. 1 hujus multiplica Quadratum cir-
cumſcriptum √ $157781\frac{1}{3}$ in ſui dimidium, ſeu Quadr. inſcri-
ptum √ $39445\frac{1}{3}$. Oritur inde Octogonum √ $78890\frac{2}{3}$. Hoc
autem Numero reſoluto provenit Octogonum in veris Nu-
meris $280\frac{88}{100}$ fere, Circulus autem 312. A quo ſublato Octog.
inſcripto, remanent $31\frac{12}{100}$ pro octo ſectionibus. Ergo ſingulæ
harum valent $3\frac{89}{100}$ proxime, F N videlicet.

IV *Pro Dodecagono inſcripto, & ejus Sectione.*

Per 9 Enunciat. cap. 1 hujus, multiplica Diametrum Cir-
culi √ $9861\frac{1}{3}$ in √ 9, hoc eſt triplam, exit Dodecagonum in-
ſcriptum √ 88752. In reſolutis vero $297\frac{91}{100}$, à Circulo 312
ablatis, reſtant $14\frac{9}{100}$ pro 12 Sectionibus Dodecagoni. Ergo
una Sectio hujus velut F Q valet $1\frac{174}{1000}$.

V *Pro Sectione quadrantis.*

Semiquadratum inſcriptum H F I, metitur Diameter H I,
quæ eſt √ $9861\frac{1}{3}$. In ſolutis vero proximis $99\frac{304}{1000}$. Quibus à ſe-
micirculo H F I 156 ablatis, reſtant pro duabus Sectioni-
bus quadrantis $56\frac{696}{1000}$; hinc pro una Sectione nempe F K I P
erunt $28\frac{348}{1000}$.

VI *Pro*

VI *Pro Corniculato* B F C K F N.

Quoniam Diameter B C metitur triangulum B A C. Sublato igitur Sectore quartæ partis Circuli nempe 78, qui est A N K à modo resoluta Diametro $99\frac{104}{1000}$ restat corniculatum dictum B F C K F N $21\frac{104}{1000}$.

VII *Pro Lunula quadrantis* G D H M.

Hæc Lunula quoniam æqualis est triangulo rectangulo A G H. Illud autem dimidium Diametri nempe H A mensurat, quod est $49\frac{652}{1000}$. Erit igitur hic eadem lunulæ quadrantis mensura.

Hæc autem omnia quum Circulo sint incommensurabilia, non in numeris, nisi veritati proximis, prodiere; frustra igitur absolutam Circuli mensuram hinc inde producere plurimi tentarunt.

Cæterum modo quis ratione Peripheriæ ad Diametrum supra in absolutis numeris cap. 3, lib. 1, inventa atque exposita $\frac{31415926}{10000000}$, pro hisce alogis, uti velit, omnia & citius, & eo veritati propius perficiet, quo Numeri hi productiores fuerint. Nos exempli usitati Numeros adhibuimus, velut etiam supra admonitum est. Rationes enim in hisce perpetuo manent, Numeris quomodocunque mutatis.

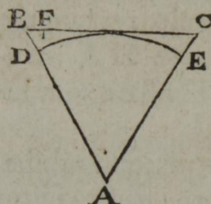
C A P. VI.

De modo Circulum è præmissis quadrandi, pro data ratione Diametri ad perimetrum: item de Circuli, & planorum adscriptorum imperata auctione, ac diminutione; tandemque ejus mensuræ hactenus nobis usitatæ ad Communem reductione.

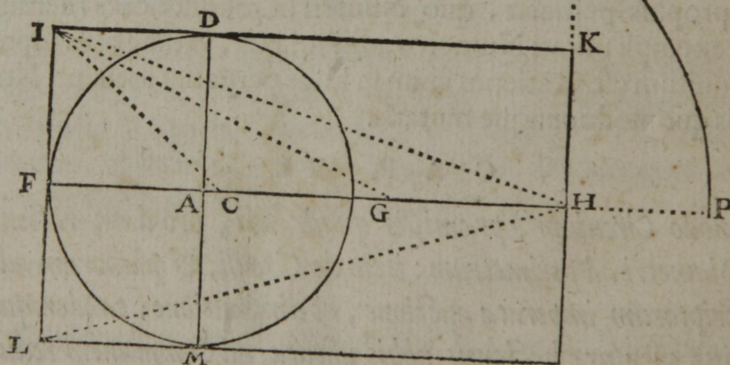
INventa è superioribus ratione Diametri ad Circuli peripheriam, etsi plures modi esse possint, Circulum in quadra-

tum transformandi; Nos tamen binos ſaltem heic pro διδομένων varietate exponemus.

Ex ſuperioribus conſtat, aut peripheriam aut Diametrum Circuli in Numero vero poſſe ſemper dari; Deinde tangentem ſeu latus, cui Sector hexagoni inſcribitur, arcui hujus Symmetrum eſſe. Siquidem ratio horum lib. 1, cap. 4 oſtenſa eſt $\frac{43}{39}$, hoc eſt in minoribus ut $14\frac{1}{3}$ ad 13. Quare in hoc caſu ubi peripheria Circuli in vero Numero conſtituta eſt, ex linea recta B C tributa in $14\frac{1}{3}$ p. æquales, fiat triangulum æquilaterum A B C, cui inſcribatur Sector hexagoni A D E, cujus arcus D E eſt 13 p. in linea recta B C numerandarum, nempe F C.



His autem datis ac conſtitutis, deſcribatur ſuper radio A D, integer circulus D F M. Et continuetur F A



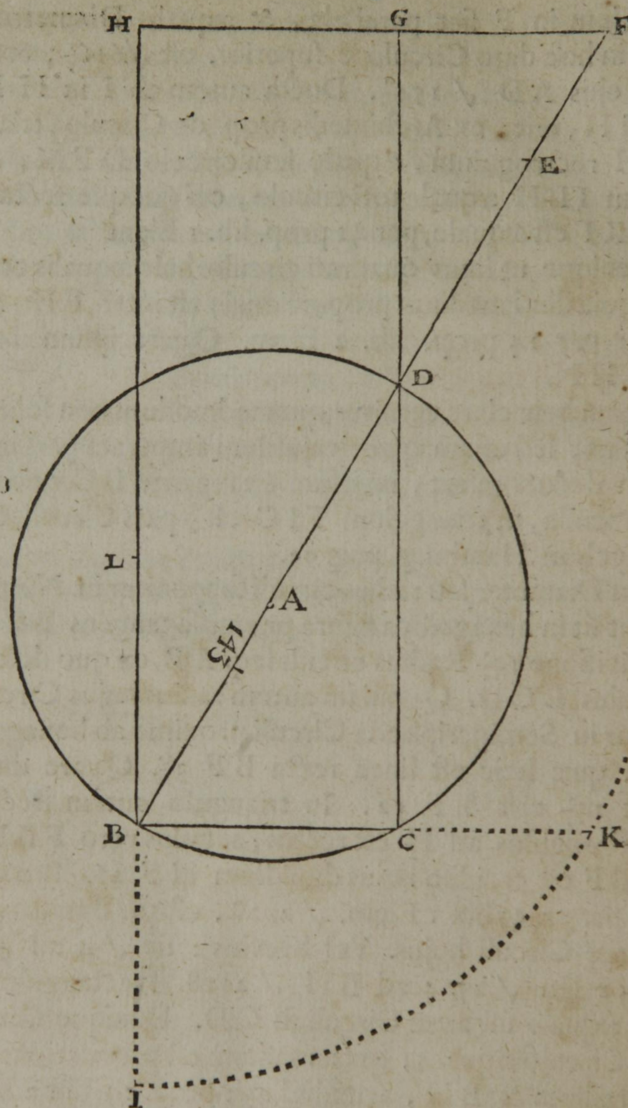
per Diametrum alteram in H, ut linea F H componatur ex tribus F C hoc eſt arcubus D E hexagoni, fiatque 39 p. quæ menſura eſt Peripheriæ Semicirculi dati. Hinc I L tangens circu-

circulum in F fiat parallela, & æqualis Diametro D M, quæ in hoc dato Circulo è ſuperior. eſt $\surd 616\frac{1}{3}$, & ideo radius ejus A D $\surd 154\frac{1}{12}$. Ducta autem ab I in H linea recta I H, erit, ex Archimedis prop. de Circulo, triangulum I F H rectangulum, æquale ſemicirculo D F M, & triangulum I L H æquale toti circulo, cui quoque rectangulum F H K I eſt æquale, per 41 prop. lib. 1 Elem.

Denique ut latus quadrati circulo huic æqualis conſtituatur, quia illud medium proportionale eſt inter F H, & H K, fitque per 14 prop. lib. 2 Elem. Quare ipſum latus erit heic H N.

Atqui heic clare cernitur, quemadmodum non ſolum totus circulus, ſed etiam quævis ejuſdem imperata pars in rectilineum deduci queat, menſura è tangente B C prius diviſo, deſumenda, ut triangulum F I C eſt $\frac{1}{6}$ pars Circuli, &c. Vide Cyclom. Hamburg. pag. 92.

Aut Diameter ſeu radius circuli ſupponitur in Numero vero, ut ſit in hexagonica figura præmiſſa tangens B C, hic in ſua diviſione $14\frac{1}{3}$ Radius circuli ſeq. A B, ex quo deſcribatur Circulus B C D. Quoniam autem radius hujus Circuli continetur in Semiperipheria Circuli proxime ab hexagono majoris, quæ heic eſt linea recta B F $3\frac{17}{43}$. Quare dum A B fuerit $14\frac{1}{3}$ erit B F 52. In triangulo autem rectangulo B H F angulus ad H eſt rectus; angulus vero F B H 30 g. Sed B F eſt 52, ideo hujus dimidium H F 26. Prodit igitur B H per pr. 47 lib. 1 Elem. $\surd 2028$, eſtque dimidia pars peripheriæ Circuli hujus. Vel brevius: ut $\surd 4$ ad $\surd 3$, ſic B F 52 ſeu $\surd 2704$ ad B H $\surd 2028$. Rectangulum vero C H æquale eſt areæ Circuli B C D. Denique latus Quadrati Circulo æqualis, quia medium eſt proportionale inter B C radium & B H, erit illud per prop. 14 lib. 2 Elem. linea recta B K. Quæ, ut ſuperior, H N de facili, ex datis, in Numeris invenitur. Invento autem ſemel latere qua-



drati Circulo æqualis, quemad. cuicunque Circulo æquale quadratum exhibeamus docet C. Clavius in Geometria sua Mechanica

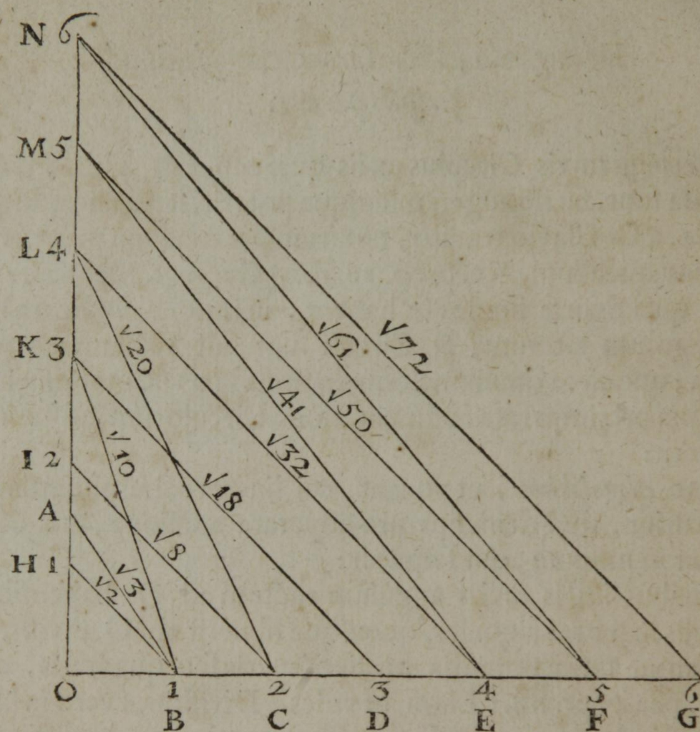
Mechanica pag. 328. Item Cyclometria Hamburgensis circa finem.

De augendo, &c. Circulo cum planis adscriptis pariter.

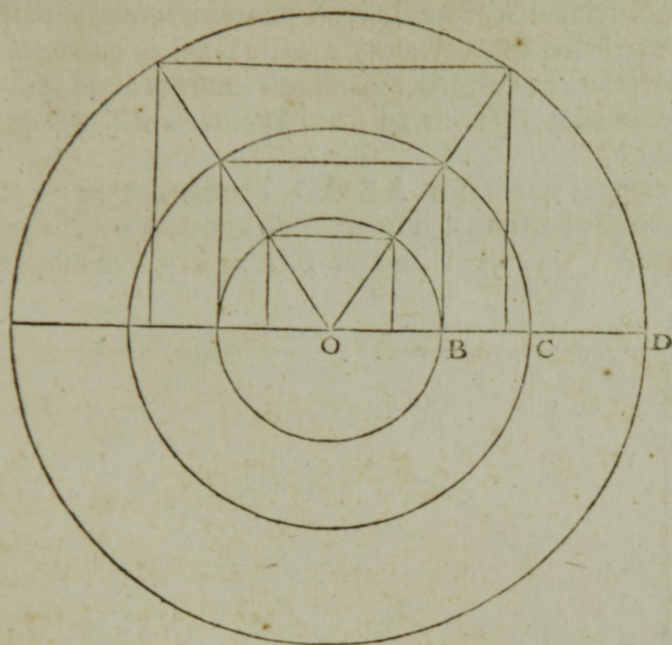
Porro quamvis Circulus ex iis quæ cap. 3 & 4 lib. 1 hujus ostensa sunt, facile augeri minuique poterit, item alio quoque modo, à C. Clavio tradito, nimirum per medium proportionale inveniendum, &c. prop. 16 lib. 6 Geomet. Mechan.: tamen quia figuræ similes se habent, in ratione duplicata homologorum laterum, & Circuli sunt, ut à Diametris quadrata; quocirca ómnium compendiosissima via, ut mihi videtur, qua pro imperata augmentatione Circulorum insistemus, hæc erit:

Fiat *Alogolabium*, ut vocant, cui lineæ rectæ potentia inscribantur, quæ deinceps pro imperata auctione, &c. usurpentur in modum, qui sequitur:

Duabus lineis rectis angulum rectum ad O habentibus, singulis in partes æquales, quousque libuerit ab O divisis, inscribantur lineæ potentia surdis numeris seu quadratis, alligatæ, per 47 pr. lib. 1 Elem. ut vides. Divisiones vero in lateribus istis duobus, angulum rectum comprehendentibus pro ipsis rationalibus habebuntur, unde *Alogolabium* quodammodo conficitur pro præsenti usu ac necessitate. Quomodò autem lineæ ipsæ inscribantur, facile ex dicta prop. 47 lib. 1 Elem. cognoscitur. Etenim pro B H Diagonio, quia latera singula O H & O B sumuntur $\sqrt{1}$, erit B H $\sqrt{2}$. Porro pro $\sqrt{3}$ extenso O supra H in A, factoque O & A æquali B H $\sqrt{2}$, erit B A $\sqrt{3}$; Et sic cæteræ lineæ, quarum numeri sunt adscripti formantur. Omnes autem inscriptæ lineæ parallelæ sunt Symmetræ, quippe à veris lateralibus numeris descendentes.



Sint nunc ſuper communi Centro A deſcripti tres Circuli ex radiis OB √1, OC √3, OD √8. Deinde ſimiles in ipſis figuræ qualeſcunque, quam facilime intra ipſos Circulos exarantur, ſaltem rectis à Centro ad ultimam circumferentiam, viam per intermedios monſtrantibus, in quacunque figurarum inſcribendarum forma ac delineatione; Sic enim ſimiles fiunt in eadem ſcilicet proportione ad invicem, qua Circuli ipſi ut hic 1, 3, 8. Atqui hic modus inter omnes, quos novi, eſt nobiliſſimus atque expeditiſſimus. Quum enim Circulus



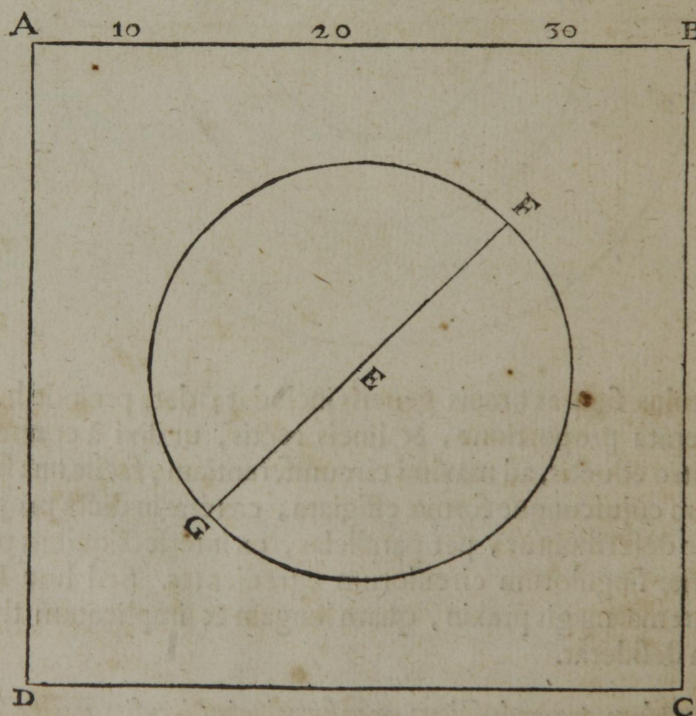
Circulus figuras omnis generis includat; data proinde hujus imperata proportione, & lineis rectis, ut dixi à communi Centro eductis, ad maximi circumferentiam, facile una figurarum cujuſcunque formæ effigiata, cæteræ in dicta proportione deſcribuntur, per parallelas, ex interſectionibus peripheriæ ſingulorum circulorum egredientes. Sed hoc Epicheirema magis praxin, quam longam & implicatam theoriam deſiderat.

Exemplum pro reductione menſurationis Circuli, noſtra Methodo ſupra confectæ ad vulgarem.

Quandoquidem aream Circuli peripheriæ parem conſtituimus,

mus, dum hujus rationem ad Diametrum exquisite indagavimus, ubi scilicet Sectores Circuli penes circumferentiam in hujus partientis æstimavimus, quæ de facili in quadrata reduci poterint, ac vulgariter mensurari, inventa nunc vera ratione Circuli peripheriæ ad suam Diametrum $\frac{31418596}{10000000}$ quam proxime.

Sit campus quadratus A B C D constans latere 30 p. & area ideo 900 partibus seu quadratis; Sitque Circulus in eo descriptus F G, cujus Diameter F G sit 20 p. Pro hujus igi-

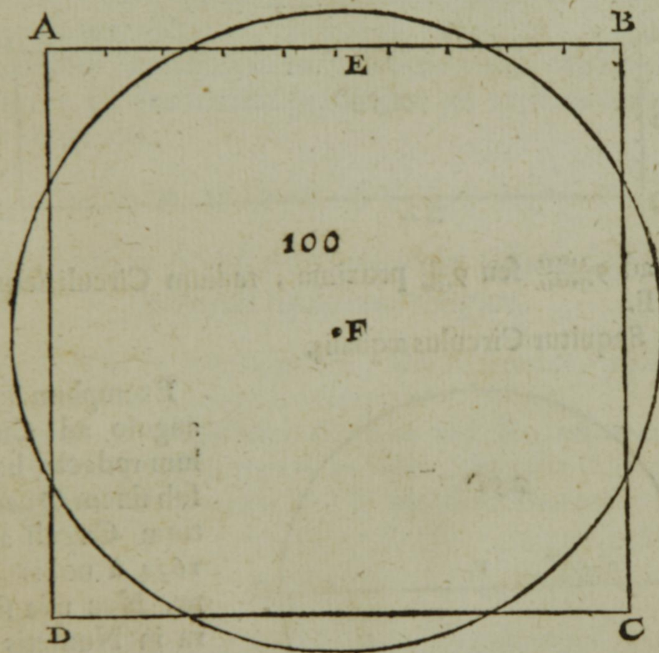


tur Peripheria erit ut 10000000 ad 20, sic 31418596 ad $\frac{628371920}{100000000}$ quo quidem numero in $\frac{1}{4}$ Diameter F G, nempe 5 multiplicato

cato producuntur pro area Circuli $\frac{3141859600}{10000000}$ ſeu $314\frac{186}{1000}$, qui ſublati è toto quadrato hoc modo $\frac{900000}{314186}$ relinquunt pro reſiduo $585\frac{814}{1000}$.

Atqui ita Geodæſia Rotundi ſe habet in comparationè cum vulgari Geodætarum menſura: Nunc reſtat quemadmodum datum Rectilineum in Circulum tranſibit.

Dato rectilineo Circulum æqualem conſtituere.

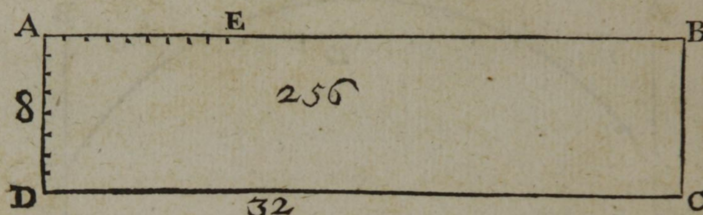


Sit primo quadratum ABCD, cujus latus AB 10 p. & ideo ipſum quadratum 100 p. cui circulus æqualis eſt conſtituendus. Poſito autem radio Circuli 10000000 & peripheria 62831920, cujus dimidium 314185960 in radium 10000000 perdu-

perducitur area Circuli 314185960000000 hujus Numeri semiradix 8862645 se habet ad radium Circuli 10000000 ut semiradix areæ quadrati 5 p. ad radium Circuli æqualis $5\frac{64}{100}$.

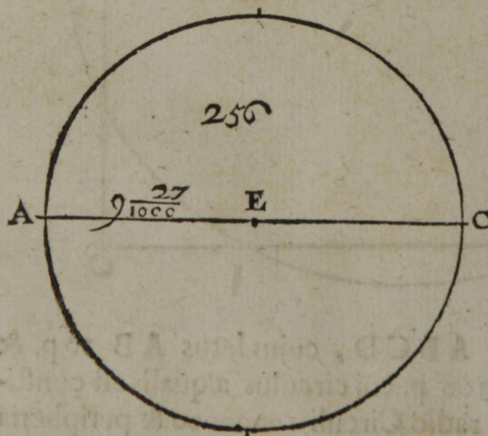
Exemplum in Rectangulo.

Sit parallelogrammum rectangulum A B C D cujus latitudo 8 p. longitudo 32, & ideo area ejus 256, cujus radix est 16, & ideo ejus semissis 8. Iam ut 8862645 ad 10000000,



sic 8 ad $9\frac{236195}{8862645}$ seu $9\frac{27}{1000}$ proxime, radium Circuli sequentis A E.

Sequitur Circulus æqualis.



Exemplum in triangulo ad Circulum redacto habes sub finem Quadraturæ Circuli anno 1634 à nobis editæ. Nec ulla figura in Numeris datur, quin mox eidem Circulus fieri possit æqualis, & contra, per ea, quæ modo præmisimus.

C A P.

CAP. VII.

De Sectionibus Circuli inveniendis, ad quamvis Diametri datam: Item de Lunulæ cujusdam æquatione sive cum trilineo, sive rectilineo; ubi omnia Numeris probantur.

HÆc praxis, quia insignem usum præstat, non solum in Geodæsia rotundi plani: Sed etiam in Stereometria, cujus corporum Circulus aut ejus partes bases sunt, proinde ipsam adjungere placuit, duplici via tradendam, nostra primum, deinde communi, ut ex collatione omnes Mathematici intelligant Cyclometriam præmissam ad veritatis normam unice congruere.

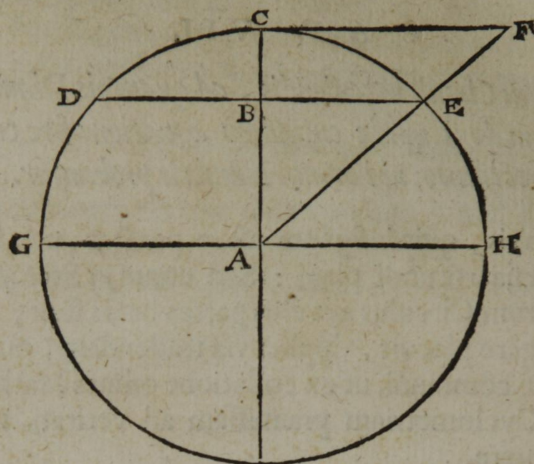
PROPOSITIO.

Radio Circuli in quasvis partes imperatas tributo, Sectiones semicirculi duplici via indagare.

Quod heic de toto Circulo demonstrandum, sufficit in semicirculo; imo uno quadrante ipsius ostendere.

Centro A describatur Circulus DCE, cujus radius AC dividatur in tres partes æquales, quarum AB est $\frac{2}{3}$. Ducta autem linea recta DBE parallela Diametro GH fit Sectio DCEB quæ invenienda est. Igitur primum pro ἀποδείξει praxique propria, ducatur ab A per E recta AF desinens in tangentem CF.

Quoniam autem ratio AC radii è superioribus ad quadrantem Circuli CH est ut 10000000 ad 15709298, AB autem $\frac{2}{3}$ radii 6666666, AE vero ipse radius 10000000. Quare in triangulo rectangulo ABE, è datis duobus lateribus, cum angulo recto ad B, dantur reliqui anguli, nempe A & E una cum latere BE, & tangens CF: Quum autem triangula



gula rectangula ACF & ABE æquiangula fuerint, & triangulum ACF mensurat tangens CF; erit igitur ut AC ad triangulum ACF in quadratis, sic AB in quadratis ad triangulum ABE. Datur proinde triangulum ABE, quo ablato à CE arcu seu Sectore ACE, remanet semisectio quæsita CEB, &c.

Numeri.

Pro angulo BAC, ut AE 10000000, ad angulum rectum B 10000000, sic AB s. r. 6666666. ℞. angulo 41 G, 48 M, 37 S, hujus complementi 48 G, 11 M, 23 S, est tangens CF 11180355. Sinus rectus BE 7453565.

Porro quia arcus quadrantis CH antea ostensus fuit 15709298, qualium radius AC est 10000000, erit pro 48 G, 11 M, 23 S, arcu CE proportionaliter 8411408, qui numerus idem est Sector Circuli ACE. Ergo differentia inter tangentem CF, & arcum CE, est 2768947 eadem quæ inter triangulum ACF, & Sectorem ACE, trilineo corni-

corniculato C F E terminata. Postremo ut se habet quadratus Numerus D E 3, nempe 9, in quem radius A C divisus fuit, ad quadr. 2, hoc est 4, videlicet $\frac{4}{9}$ radii A B: sic se habet triangulum A C F 11180355, ad 4969046 triangulum A B E. Differentia igitur inter Sectorem A C E 8411408, & triangulum A B E 4969046, est 3442362, ut puta semissis Sectionis D C E B. Ergo ipsa Sectio quæsita est 6884724. Quatenus semicirculus G C H nobis est 31418596; residuum igitur, nempe Zona G D E H est 24533472.

Aliter via communi.

Quoniam area Circuli conficitur è Semidiametro & Semiperipheria Circuli in modum rectanguli; & Semiperipheria Circuli est 31418596. Radius vero 10000000, quare rectangulum hinc ortum, nempe 314185960000000, areæ Circuli est æquale, cui $\frac{1}{4}$ pars videlicet 7854649 [Siphris facilioris computationis gratia omissis] est mensura Sectoris quadrantis pariter & Sectoris anguli 48 gr. 11 m. 23 s. 4205704 dimidium ejus, qui in praxi superiori. Restat ut triangulum A B E acquiramus vulgari praxi [quod superiori ἐργασίᾳ compendiose è ratione homologorum laterum in triangulis æquiangulis adepti sumus è prop. 19 lib. 6 Elem.] Quia igitur duo ejus latera circa rectum angulum data sunt, nempe B E 7453565, & A B 6666666. Quare alterius dimidio in alterum ducto, oritur inde triangulum quæsitum A B E 2484522 à Sectore A C E 4205704 sublatum relinquit Semisectionem C E B 1721182, cujus duplum est 3442364, tota Sectio D C E B, qualium semicirculus est 7854649, hoc est dimidium superioris. At Semissis Sectionis superioris erat 3442362, differentia saltem 2 in ult. Numero deprehensa. Nec dubitandum quin in aliis omnibus exemplis eadem vel major præcisio & convenientia se offerat, & sic praxin nostram per superiora in Numeris pariter & lineis demonstratam, omnes ingenui Ma-

thematici unice veritati litare consentient, in eo etiam, quod passim inter peripheriam Circuli & aream ipsius, item inter peripherias circumscriptarum figurarum & ipsas figuras, nullum pro magnitudinibus earundem cum Circulo mensurandis discrimen agnovimus; ut eo melius magnitudines commensurabiles ab alogis per eundem discernerentur, absque qua cognitione nec vera peripheriæ Circuli constitutio, nec rationis Diametri ad eandem inventio vera unquam patefacta fuisset.

Nunc ultimum hoc nostrum Opus Cyclometricum sequenti Problemate claudemus.

PROBLEMA CYCLOMETRICVM ad solvendum propositum.

Circuli duo super una linea recta describantur, quorum Radius majoris, latus est trianguli æquilateri minori inscripti. Porro à Centro minoris, ad tangentem trigoni hujus, nempe per utrumque terminum hexagoni majoris, duæ lineæ rectæ ducantur, singulæ scilicet æquales Diametro minoris; Primum invenire in minimis numeris integris utriusque Circuli Diametrum, & per consequens quantitatem Circuli majoris ad minorem. Deinde ostendere Lunulam creatam ex arcu hexagoni majoris, & arcu trigoni minoris, æqualem esse spatio trilineari, seu differentiæ inter hexagonum minoris, Circuli, & $\frac{1}{6}$ partem trianguli æquil. minori Circulo circumscripti. Denique rationem arcus hexagoni majoris Circuli ad arcum hexagoni minoris, eaque omnia concinne in Numeris.

Primo super Centro D describatur Circulus minor A B F C, cui inscribatur triangulum æquil. A B C. Deinde è Centro A, radio A B, Circulus describatur major B C H. Porro à D Centro minoris per B in E, & C in G egrediantur lineæ D E & D G, lineam F G determinantes tangentem Circulum minorem in F. Primum in Numeris integris dato radio circuli majoris A B, invenire radium circuli minoris D B, unde ex quadratis ipsorum ratio magnitudinis horum

Circulorum

Circulorum ad invicem cognoſcitur per 2 pr. lib. 12 El. Deinde monſtrare lunulam B F C I æqualem eſſe trilineo B E F.

Vltimo determinare rationem peripheriæ ſeu arcum B F C ad peripheriam ſuum arcum B I C.

Reſolutio ſingularum quæſtionum propoſitarum etiam in Numeros, ex præmiſsis.

Poſito A B 3 p. erit B R $1\frac{1}{2}$; ut vero B R $1\frac{1}{2}$ ad $\sqrt{3}$, ſic B D radius minoris ad $\sqrt{4}$. Exit igitur D B $\sqrt{3}$, qualium A B eſt 3. Et propterea quando tota Diameter majoris Circuli

culi H I ponitur 3 p. erit Diameter minoris A F $\surd 3$; in quadratis vero $\surd 9$ & $\surd 3$. Vnde liquet Circulum majorem ter ſuperare minorem, quæ ratio quoque eſt figurarum ſimilium utrique Circulo adſcriptarum. Proinde Sectio B C tripla eſt Sectionis B F.

Z

Porro dum Diameter Circuli minoris A F erit $\surd 3$, fit radius ejus D B $\surd \frac{3}{4}$, B R vero $\frac{3}{4}$, quæ linea metitur triangulum æquilaterum D B F. Vt autem 43 ad 9, ſic D B F $\frac{3}{4}$ ad Sectionem B F $\frac{27}{172}$.

Hinc ut lunula B F C I habetur, quia triangulum B F C æquale eſt triangulo æquil. D B F $\frac{3}{4}$. Et Sectio hexag. B C tripla eſt Sectionis B F $\frac{27}{172}$. erit igitur illa $\frac{81}{172}$, ablata à $\frac{3}{4}$, remanent $\frac{48}{172}$, quibus adduntur duæ Sectiones B F & C F nempe $\frac{54}{172}$, & fit Summa pro lunula B F C I $\frac{102}{172}$, vel in minoribus Numeris integris $\frac{51}{86}$; Sed ablata è triangulo E F B $\frac{3}{4}$, una Sectione B F $\frac{27}{172}$, remanent quoque pro trilineo E F B $\frac{102}{172}$ ſeu $\frac{55}{86}$.

Vltimo, ratio arcus trigoni minoris Circuli ad arcum hexagoni majoris, hoc eſt, arcus B F C ad arcum B I C, hac proportione invenitur ut 2 ad $\surd 3$. Nam ut Diameter minoris Circuli $\surd 3$ ſe habet ad Diametrum Circuli majoris 3; Sic ſe habet hexag. minoris arcus F B unitas ad hexagoni majoris arcum B C, $\surd 3$: Vel; ut 43 ad $\surd 18252$, ſic 3 ad $\surd \frac{164268}{1849}$. Similiter, ut $\surd 1849$ ad $\surd 18252$, ſic $\surd 3$ ad $\surd \frac{54756}{1849}$. Diviſo igitur Numero $\surd \frac{164263}{1849}$ pro peripheria majoris, in Numerum $\surd \frac{54756}{1849}$ peripheriæ Circuli minoris, erit quotus $\surd 3$; Qualium itaque hexagoni arcus Circuli majoris B I C eſt $\surd 3$, erit arcus F C Circuli minoris — 1, & B F C 2. Atque hinc apparet, quod conceſſa Diametro Circuli alicujus in Numero vero, peripheriam exire in Surdum, quem metitur $\surd 3$, & contra, ut ſatis in ſuperioribus patet.

Μόνῳ Θεῷ δόξα.


CB